РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

У ч е б н а я с е р и я

В. С. Абатурова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ШКОЛЬНИКАМ

1

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Владикавказ
2007

УДК 517.122
ББК 22.143
А-13

Одобрено Советом при учебно-методическом кабинете математики кафедры естественно математического цикла Северо-Осетинского Республиканского института повышения квалификации работников образования

Научный редактор:
доктор физ.-мат. наук, Соросовский профессор *Кусраев А. Г.*

Рецензенты:
кандидат физ.-мат. наук *Басаева Е. К.*,
кандидат физ.-мат. наук *Тибилов К. Т.*

А-13 **Абатурова В. С.**

Математическое моделирование школьникам 1. Линейные модели: Учебное пособие / Институт прикладной математики и информатики.—Владикавказ: Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, 2007.—112 с.

ISBN 978-5-93000-045-0

Пособие посвящено таким важным математическим понятиям, как линейная функция, линейное уравнение, линейное неравенство, которые находят широкое применение при построении линейных математических моделей, имеющих многочисленные приложения, в физике, экономике, и т. д. Пособие предназначено для учителей, студентов педагогических вузов и школьников.

ISBN 978-5-93000-045-0

Оглавление

Предисловие редактора серии

Пособие представляет собой часть элективного курса «Математическое моделирование» для профильной школы и школы с углубленным изучением математики, разрабатываемого в отделе образовательных технологий Института прикладной математики и информатики ВНЦ РАН. Цель курса — познакомить школьников с методами математического моделирования, а также соответствующим математическим инструментарием, не выходящим далеко за пределы программы средней школы. Курс демонстрирует универсальный характер математики, как инструмента для решения разнообразнейших задач из различных сфер человеческой деятельности, таких как организационное управление, экономика, экология, техника, тайнопись (криптография) и т. д. С одной стороны, построение, исследование и решение математических моделей составляет одну из важнейших сторон математической культуры, а с другой стороны, математическое моделирование является мощным методом познания мира, а также прогнозирования и управления. Содержание учебного курса предполагает ознакомление школьников с основными этапами математического моделирования. В ходе изучения курса школьник выработает навыки записывать в математических терминах качественные и количественные представления изучаемой практической задачи, исследовать математические задачи, к которым приводят модели, интерпретировать полученные решения в терминах исходной модели. Курс способствует также освоению научной методологии, системного мышления, междисциплинарного подхода. Он ориентирует школьника на проникновение в суть явлений, на постижение глубинных причин процессов, происходящих в природе и обществе, нацеливает на поиск истины и скрытого порядка в окружающем хаосе, воспитывает объективное и строгое отношение к себе и к окружающим. Курс прививает навыки моделирования и прогнозирования последствий любых действий, поэтому способствует выработке рациональной и ответственной мотивации поступков.

Цель данного выпуска — показать, что математические понятия, такие, как линейная функция, линейное уравнение, линейное неравенство являются основой для построения линейных математических моделей, которые имеют многочисленные приложения, в частности при решении экономических задач.

А. Г. Кусраев

Предисловие

В пособии принят геометрический подход к изучению вводимых понятий, который реализован посредством координатного метода, позволяющего дать наглядную интерпретацию связи основных понятий алгебры и геометрии — чисел и точек соответственно. В основу изложения материала книги положен основной принцип метода координат — множество точек координатной плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством упорядоченных пар действительных чисел.

В первых двух главах изложен и систематизирован базовый школьный материал о линейных функциях и линейных уравнениях, линейных неравенствах и системах линейных неравенств с двумя неизвестными. Предлагается строгое доказательство теоретических положений о графике линейной функции, графике линейного уравнения с двумя неизвестными, графическом способе решения систем линейных уравнений и неравенств с двумя неизвестными и их приложениях.

В третьей главе представлены некоторые модели реальных процессов (физических и экономических), таких как модель времени, модель равномерного прямолинейного движения, модель рыночного равновесия и модель национального дохода, описываемые с помощью линейных функций, кроме того предложены текстовые задачи, формализацией которых являются линейные уравнения и неравенства с двумя неизвестными и их системы.

Последние три главы содержат приложения к задачам на линейные модели, которые носят практический характер, в частности, к задачам линейного программирования с двумя управляемыми переменными, которые позволяют показать метод математического моделирования школьникам.

Материал, представленный в книге был частично апробирован при проведении факультативных занятий по математике в средней общеобразовательной школе №41 г. Владикавказа. По материалам пособия прочитан цикл лекций и проведен ряд семинаров для слушателей курсов повышения квалификации Северо-Осетинского института повышения квалификации работников образования.

Пособие предназначено для учителей, студентов математических факультетов педагогических вузов и учащихся старших классов.

В. С. Абатурова

1. Линейные функции и линейные уравнения

1.1. Функции и графики

Метод координат. В основе школьной (да и всей) математики лежат числа и точки. Изображение чисел точками представляет собой древнейший метод исследования. Можно говорить о простейшем примере моделирования, т. е. изучении свойств одних объектов (чисел) с помощью других — их изображений (точек).[1] Та же идея в полной мере реализована в методе координат, созданном Р. Декартом.[2] Напомним вкратце основные положения метода координат.

Координаты на прямой. Для того чтобы ввести координаты на прямой l, необходимо на ней отметить точку O, выбрать направление и зафиксировать единичный отрезок — масштаб измерения длин. Точка O делит прямую на две полупрямые, одну из которых будем называть *положительной*, а другую — *отрицательной*. Каждой точке M, лежащей на прямой l, сопоставим число $x \in \mathbb{R}$ по следующим правилам:

(1) выделенной точке O сопоставляется $x = 0$;

(2) если точка M лежит на положительной полупрямой, то ей сопоставляется $x := OM$, где ОМ — длина отрезка OM в выбранном масштабе;

(3) если точка M лежит на отрицательной полупрямой, то полагают $x := -OM$.

Число x называют *координатой* точки M. Каждое вещественное число $x \in \mathbb{R}$ является координатой некоторой точки $M \in l$: если $x = 0$, то $M = O$; если $x > 0$, то точка M лежит на положительной полупрямой и длина отрезка OM равна x; если $x < 0$, то точка M лежит на отрицательной полупрямой и длина отрезка OM равна $-x$. Таким образом, принимается следующее утверждение (кото-

---

[1]Этот метод исследования в контексте нестандартного анализа обсуждается в статье С. С. Кутателадзе [11].

[2]Рене Декарт (1596–1650) — французский философ, математик, физик и физиолог. В своей книге «Геометрия» (1637) он предложил метод координат и заложил основы аналитической геометрии.

рое называют иногда *первым основным постулатом аналитической геометрии*, см. [14]):

Между точками прямой и действительными числами устанавливается взаимно однозначное соответствие, причем порядок чисел соответствует порядку точек.

Последнее означает, что если точка C лежит на отрезке AB, то ее координата c заключена между координатами a и b точек A и B соответственно, т. е. если считать, что A точка с меньшей координатой, то выполняется $a < c < b$.

Координаты на плоскости. Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые. Обозначим точку пересечения этих прямых буквой O. На каждой из этих прямых зададим положительное направление и укажем единичный отрезок. Тогда говорят, что на плоскости задана *прямоугольная система координат*, или *декартова система координат*. Плоскость на которой задана прямоугольная система координат называют *координатной плоскостью*. Обычно одну ось изображают в виде горизонтальной, направленной слева направо, прямой и называют осью *абсцисс* (или осью Ox), а другую — в виде вертикальной, направленной снизу вверх, прямой и называют осью *ординат* (или осью Oy). Декартову систему координат обозначают xOy.

Декартовыми координатами точки M называют упорядоченную пару чисел $(x_0; y_0)$, где x_0 и y_0 — координаты проекций точки M на оси Ox и Oy соответственно. При этом x_0 называют абсциссой точки M, а y_0 — ординатой точки M (см. рис. 2).

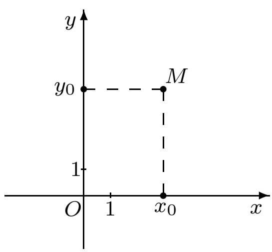


Рис. 2.

Основной принцип метода координат, который называют также *вторым основным постулатом аналитической геометрии* (см. [14]), можно сформулировать следующим образом:

Множество точек координатной плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством упорядоченных пар действительных чисел.

Подробнее, принимаются следующие два утверждения:

(1) каждой точке координатной плоскости соответствует упорядоченная пара действительных чисел — ее декартовых координат;

(2) любой упорядоченной паре действительных чисел соответствует единственная точка координатной плоскости, координаты которой составляют данную пару.

Определения и примеры. Пусть X — некоторое множество действительных чисел, т. е. $X \subset \mathbb{R}$. Пусть каждому числу x из X в силу некоторого (вполне определенного) закона f приведено в соответствие единственное число y. Это число y принято обозначать символом $f(x)$. Тогда говорят, что задана функция, определенная на множестве X, или, короче, задана функция из X в $\mathbb{R}$, и пишут $f : X \to \mathbb{R}$. Число $f(x)$ называют *образом* числа x при функции f или *значением* функции f в точке x и пишут $y = f(x)$ или $f : x \mapsto y$. Символ общего элемента x множества X называют *независимой переменной* или *аргументом*. Если независимая переменная x принимает некоторое конкретное значение x_0, т. е. $x := x_0$, то значение функции в точке x_0 обозначают $f(x_0)$ и пишут $y_0 = f(x_0)$. Множество X называют *областью определения* функции f. Принято также говорить, что задана функция $y = f(x)$ $(x \in X)$, причем часто указание на область определения опускается.

Существуют различные способы задания функции: формула, таблица, график, словесное описание. Рассмотрим соответствующие примеры.

(а) *Функция задана формулой*: $y = 6x + 20$.

(б) *Функция задана таблицей*:

x	10	11	12	13	14	15	16	17
y	80	88	96	104	112	120	128	136

(в) *Функция задана словесно*: функция принимает значение 1, если аргумент есть рациональное число и 0, если аргумент — число иррациональное. Эта функция носит название *функции Дирихле.*

(г) *Функция задана словесно*: значение функции равняется аргументу, если аргумент есть число неотрицательное и числу, противоположному аргументу, если аргумент — число отрицательное. Эту функцию называют *модулем* и обозначают $y = |x|$. Таким образом,

$$y = |x| := \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

(д) *Функция задана графически* (см. рис. 1):

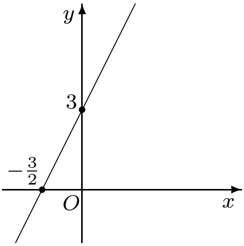


Рис. 1.

Две функции $f : X \to \mathbb{R}$ и $g : Y \to \mathbb{R}$ считают *совпадающими* или *равными* и пишут $f = g$, если $X = Y$ и $f(x) = g(x)$ для каждого $x \in X$. Так, например, функция, заданная графически в примере (д), совпадает с функцией $y = 2x + 3$ ($x \in \mathbb{R}$); функция, заданная таблицей в примере (б), совпадает с функцией $y = 8x$ ($x \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$), а функция, заданная словесно в примере (г), совпадает с функцией $y = \sqrt{x^2}$.

Графиком $\mathrm{graph}(f)$ функции $f : X \to \mathbb{R}$ называют множество всех упорядоченных пар вида $(x; f(x))$, где x пробегает область определения X; символически,

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x; f(x)) : x \in X\}.$$

Зададим прямоугольную систему координат xOy. Учитывая взаимно однозначное соответствие точек плоскости и упорядоченных пар чисел, *график функции* $f : M \to \mathbb{R}$ можно изобразить множеством точек координатной плоскости xOy с координатами $(x; f(x))$, где x — любое действительное число из области определения функции.

Историческая справка. Понятие «функция» имеет сложный путь развития. Идея зависимости одних величин от других восходит к древнегреческой науке (V–VI в. до н. э.) и возникла в связи с геометрическими задачами. Еще Исаак Ньютон (1643–1727), один из основоположников математического анализа, использовал язык геометрии при рассмотрении зависимости величин. Это связано с тем, что вплоть до XVII века математика развивалась по двум направлениям — арифметика и геометрия, и лишь в XVII веке, после введения Рене Декартом (1569–1650) понятия *переменной величины*, круг изучаемых в математике вопросов расширился; стало возможным изучение количественных отношений в процессе их изменения. При этом на первый план выдвинулось понятие функции, играющее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения, как ранее понятия величины и числа. Хотя фактически понятием функции пользовались уже Пьер Ферма (1601–1665) и Рене Декарт, сам термин «функция» возник лишь в 1694 г. в работах немецкого ученого Готфрида Вильгельма Лейбница (1646–1716), делящего с Исааком Ньютоном заслугу создания математического анализа. У Лейбница понятие функции имело очень узкий смысл. Он называл так абсциссу и ординату, связанные с определенной точкой кривой так, что между каждыми двумя из них существует некая зависимость. Таким образом, и Лейбниц остался в круге геометрических представлений. Следующий шаг в развитии понятия функции связан с именем гениального петербургского академика Леонарда Эйлера (1707–1783). Дальнейшее развитие понятия функции принадлежит великому русскому математику Николаю Лобачевскому и немецкому математику Петеру Густаву Лежёну Дирихле (1805–1859). Определение П. Г. Л. Дирихле (с некоторым уточнением) было окончательным для числовых функций числового аргумента. Дальнейшее развитие состояло в том, что стали рассматривать функции на произвольных (не числовых) множествах [3].

Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции.
2. Что значит задать функцию?
3. Назовите способы задания функции.
4. Дайте определение графика функции.
5. Как вводятся координаты на прямой?
6. Сформулируйте первый основной постулат аналитической геометрии.
7. Как вводятся координаты на плоскости?
8. Сформулируйте второй основной постулат аналитической геометрии.

1.2. Линейная функция

Определения и простейшие свойства. Функцию из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ называют линейной, если она совпадает с функцией вида $y = kx + b$ ($x \in \mathbb{R}$), где k и b — фиксированные действительные числа (параметры), а x — независимая переменная.

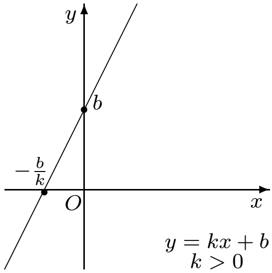
Перечислим основные свойства линейной функции $y = kx + b$.

1. Область определения линейной функции — множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

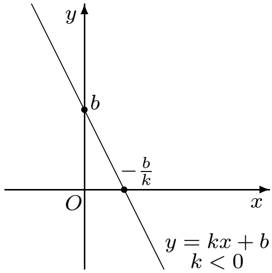
2. Линейная функция нечетна, если $b = 0$; четна, если $k = 0$; не является ни четной, ни нечетной если $k \neq 0$ и $b \neq 0$.

3. Функция $y = kx + b$ при $k \neq 0$ имеет единственный нуль — число $x = -b/k$, не имеет нулей при $k = 0$ и $b \neq 0$, тождественно равна нулю при $k = 0$ и $b = 0$.

4. Линейная функция $y = kx + b$ возрастает на всей числовой прямой при $k > 0$ (см. рис. 3а) и убывает на всей числовой прямой при $k < 0$ (см. рис. 3б).



а)



б)

Рис. 3.

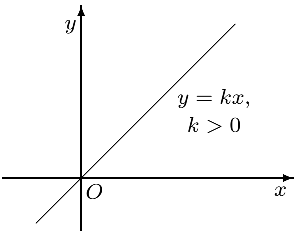


Рис. 4.

Специальные виды линейной функции. *Прямая пропорциональная зависимость.* Если $b = 0$, то линейная функция задается формулой $y = kx$ и называется *прямой пропорциональной зависимостью* (или прямой пропорциональностью). Графиком прямой пропорциональной зависимости является прямая, проходящая через начало координат (см. рис. 4).

Постоянная функция. Если $k = 0$, то линейная функция задается формулой $y = b$ и называется *постоянной функцией.* Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси Ox ($b \neq 0$) или совпадающая с осью Ox ($b = 0$).

Прямую на координатной плоскости назовем *вертикальной* (*горизонтальной*), если она параллельна оси Oy (соответственно оси Ox) или совпадает с ней. Если прямая не является ни горизонтальной, ни вертикальной, то ее называют *наклонной.* Множество всех линейных функций $y = kx + b$, где k и b — произвольные константы, и множество всех невертикальных прямых координатной плоскости находятся во взаимно однозначном соответствии. Точнее имеет место следующий факт.

Теорема 1. *Любая невертикальная прямая служит графиком некоторой линейной функции. Наоборот, графиком линейной функции $y = kx + b$, где k и b — некоторые константы, является невертикальная прямая.*

◁ Докажем первую часть теоремы. Возможны три случая расположения невертикальной прямой l в координатной плоскости.

Случай 1. Пусть прямая l горизонтальна (рис. 5а). Тогда она пересекает ось Oy в некоторой точке, например, в точке $(0; b)$. Прямая l параллельна оси Ox, поэтому любая ее точка имеет ординату $y = b$. Для всех других точек координатной плоскости $y \neq b$. Таким образом, горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0; b)$ является графиком линейной функции $y = b$.

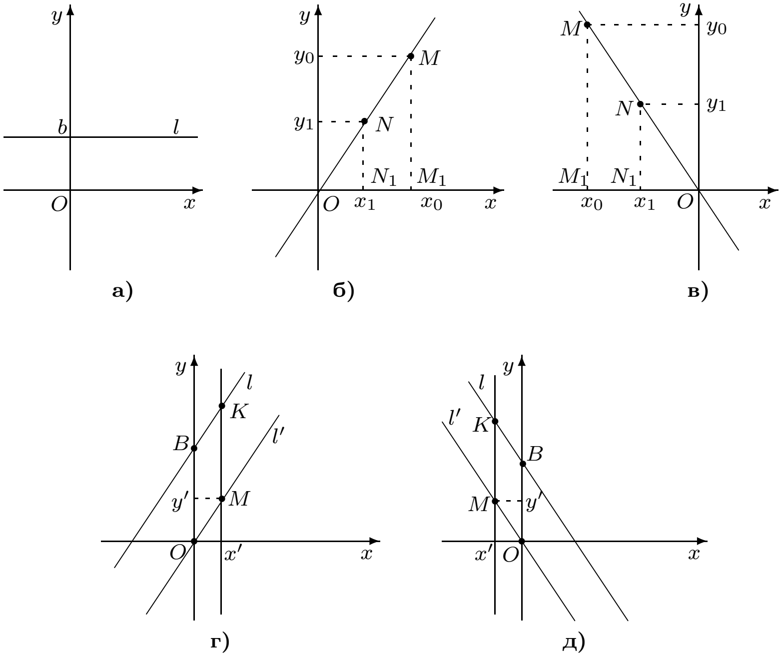


Рис. 5.

Случай 2. Пусть прямая l наклонна и проходит через начало координат. Тогда либо точки прямой l имеют координаты одинаковых знаков, т. е. прямая расположена в I и III координатных четвертях (см. рис. 5б) либо точки прямой l имеют координаты противоположных знаков, т. е. прямая расположена во II и IV координатных четвертях (см. рис. 5в).

Зафиксируем на прямой l точку $M(x_0; y_0)$ и возьмем на этой прямой произвольную точку $N(x_1; y_1)$, причем M и N не совпадают с началом координат. Проведем через точки M и N прямые, параллельные оси Oy. Обозначим через $M_1(x_0;0)$ и $N_1(x_1;0)$ точки пересечения соответствующих прямых с осью Ox.

Заметим, что треугольники MOM_1 и NON_1 подобны, так как они прямоугольные и имеют общий угол MOM_1. Тогда справедливо равенство:

$$\frac{MM_1}{M_1O} = \frac{NN_1}{N_1O}.$$

Введем обозначение: если прямая l расположена в I и III координатных четвертях (рис. 5б), то положим $\frac{MM_1}{M_1O} = k$, а если l расположена во II и IV координатных четвертях (рис. 5в), то $\frac{MM_1}{M_1O} = -k$. Тогда справедливо соотношение

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{y_1}{x_1} = k.$$

Поскольку точка $N(x_1;y_1)$ взята произвольно, то это соотношение справедливо для любой точки $(x;y)$ лежащей на прямой l, т. е. $\frac{y}{x} = k$. Это означает, что координаты произвольной точки $(x;y)$ прямой l удовлетворяют уравнению $y = kx$, поэтому прямая l является графиком функции $y = kx$.

Случай 3. Пусть прямая l наклонна и не проходит через начало координат. Тогда она пересекает ось Oy в некоторой точке, например, в точке $B(0;b)$, причем $b \neq 0$. Возможные варианты расположения прямой l в координатной плоскости при $b > 0$ изображены на рис. 5г и 5д. При $b < 0$ рассуждения аналогичны.

Проведем через начало координат прямую l', параллельную прямой l. Возьмем на прямой l' произвольную точку $M(x';y')$ и проведем через эту точку прямую, параллельную оси Oy. Обозначим через K точку пересечения этой прямой и прямой l и рассмотрим параллелограмм $OBKM$. Поскольку отрезки OB и MK равны и $OB = b$, то $MK = b$, следовательно точка K имеет координаты $(x';kx')$. Но поскольку для точки $M(x';y')$ на прямой l' справедливо соотношение $y' = kx'$, то точка K имеет координаты $(x';kx'+b)$, т. е. имеет место равенство $y' = kx'+b$. Тогда для любой точки с координатами $(x;y)$ на прямой l справедливо соотношение $y = kx+b$, т. е. прямая l является графиком функции $y = kx+b$

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть дана линейная функция $y = kx+b$. По определению графиком функции $y = kx+b$ является множество точек координатной плоскости вида $(x;kx+b)$.

Возьмем две различные точки $(0; b)$ и $(1; k+b)$, принадлежащие графику функции. Проведем через эти точки $(0; b)$ и $(1; k+b)$ прямую l. Из доказанного выше следует, что эта прямая l является графиком некоторой линейной функции, например, $y = k'x+b'$. Поскольку точки $(0; b)$ и $(1; k+b)$ лежат на этой прямой, то справедливы соотношения: $b = b'$, $kx+b = k'x+b'$, т. е. $k = k'$. Тогда прямая l является графиком функции $y = kx + b$, что и требовалось доказать.

Замечание. Графиком функции $y = kx + b$ является невертикальная прямая, проходящая через точки $(0; b)$ и $(-b/k; 0)$.

Геометрический смысл параметров k и b. Параметр b называют *начальным параметром.* Он является ординатой точки пересечения графика функции $y = kx + b$ с осью Oy.

Параметр k называют *угловым коэффициентом* прямой $y = kx + b$. Если $k > 0$, то он совпадает с тангенсом острого угла α между прямой и осью абсцисс, т. е. $k = \operatorname{tg}\alpha$ (на рис. 6а $\alpha = \angle MNM'$). Действительно, по определению тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MM'}{M'N} = k$ (см. доказательство теоремы 1, случай 2).

Если $k < 0$, то он совпадает с числом, противоположным тангенсу острого угла α между прямой и осью абсцисс ($k = -\operatorname{tg}\alpha$) (рис. 6б $\alpha = \angle MNM'$). Действительно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{MM'}{M'N} = -k$ (см. доказательство теоремы 1, случай 2).

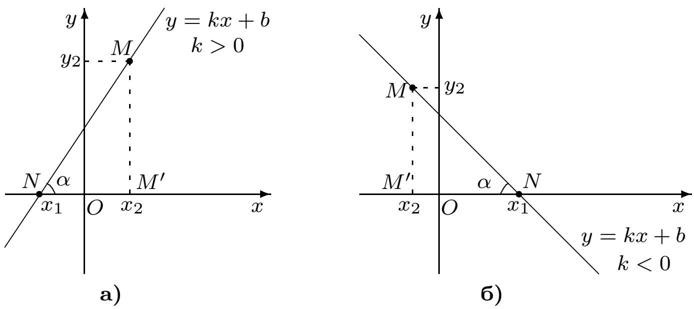


Рис. 6.

Взаимное расположение графиков линейных функций. Рассмотрим две линейные функции $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.

Прямые, являющиеся графиками этих функций, пересекаются в одной точке, параллельны или совпадают в зависимости от значений параметров k_1, k_2, b_1 и b_2.

(а) *Указанные графики совпадают, если и только если* $k_1 = k_2$ *и* $b_1 = b_2$.

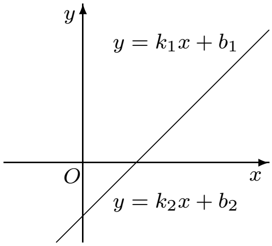


Рис. 7а.

◁ Действительно, если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$, то эти функции равны, поэтому их графики также совпадают. Наоборот, пусть графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают, т. е.

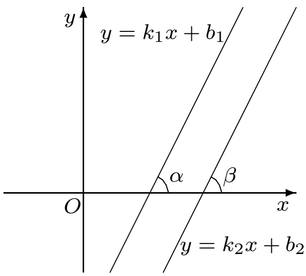
$$\mathrm{graph}(f_1) = \{(x; k_1x + b_1) : \ x \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \mathrm{graph}(f_2) = \{(x; k_2x + b_2) : \ x \in \mathbb{R}\},$$

(см. рис. 7а). Если две точки $(x_1; k_1x_1 + b_1)$ и $(x_2; k_2x_2 + b_2)$ совпадают, то $x_1 = x_2$ и $k_1x_1 + b_1 = k_2x_2 + b_2$. Отсюда имеем $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Далее, из равенства $(k_1 - k_2)x = b_2 - b_1$, также верного для любого x, при $x := 0$ выводим, что $b_1 = b_2$, а при $x := 1$ получаем $k_1 = k_2$. ▷

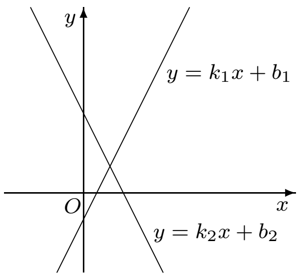
(б) *Рассматриваемые графики параллельны, если и только если* $k_1 = k_2$ *и* $b_1 \neq b_2$.

◁ Соотношение $k_1 = k_2$ влечет равенство углов α и β, (см. рис. 7б). Но $b_1 \neq b_2$, поэтому графики не совпадают в силу (а). Следовательно, прямые параллельны.

Наоборот, пусть графики функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны. Тогда один из них можно совместить с другим с помощью параллельного переноса. Другими словами существует константа $c \neq 0$ такая, что графики функций $y = k_1x + b_1 + c$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают. Последнее означает, что $k_1x + b_1 + c = k_2x + b_2$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Теперь так же, как и в случае (а), выводим $b_2 = b_1 + c \neq b_1$ и $k_1 = k_2$. ▷



б)



в)

Рис. 7.

(в) *Изучаемые графики пересекаются, если и только если* $k_1 \neq k_2$.

$\lhd$ Прямые пересекаются в том случае, когда они не совпадают и не параллельны. Но в силу установленного в (а) и (б) рассматриваемые графики пересекаются тогда и только тогда, когда $k_1 \neq k_2$, (см. рис. 7 в).

Действительно, $k_1 \neq k_2$, лишь в том случае, если случаи (а) и (б) невозможны. $\rhd$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение линейной функции.
2. Сформулируйте свойства линейной функции.
3. Что является графиком линейной функции?
4. Каков геометрический смысл углового коэффициента прямой $y = kx + b$?
5. Какую функцию называют прямой пропорциональной зависимостью?
6. Что является графиком функции $y = kx$?
7. Что является графиком функции $y = b$?
8. При каких условиях графики линейных функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, пересекаются, совпадают?

1.3. Линейное уравнение с двумя неизвестными

Определения. Уравнение вида $ax+by+c = 0$, где a, b, c — фиксированные действительные числа (параметры), а x и y — неизвестные, называют *линейным уравнением* (или *уравнением* 1*-ой степени*) с двумя неизвестными. Числа a и b называются *коэффициентами* при неизвестных, число c — *свободным членом.*

Решением линейного уравнения с двумя неизвестными называют такие значения x_0 и y_0 неизвестных x и y соответственно, при подстановке которых в уравнение вместо неизвестных, получается верное числовое равенство. Чтобы не путать значения неизвестных удобно рассматривать упорядоченную пару неизвестных $(x; y)$. Тогда решением уравнения с двумя неизвестными x и y будет упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, обращающая его в верное числовое равенство при подстановке x_0 вместо x и y_0 вместо y.

Решить линейное уравнение с двумя неизвестными означает найти множество всех решений этого уравнения. Если уравнение имеет хотя бы одно решение, то это множество непусто. Но может оказаться, что искомое множество пусто (т. е. не содержит элементов). В этом случае нужно доказать, что рассматриваемое уравнение решений не имеет. Множество всех решений линейного уравнения с двумя неизвестными называют также *графиком* этого линейного уравнения. Множество всех точек координатной плоскости, соответствующее множеству всех решений линейного уравнения с двумя неизвестными, также называем *графиком* этого уравнения.

Графический метод решения линейного уравнения с двумя неизвестными. Под графическим методом решения уравнения понимается построение графика этого уравнения на координатной плоскости. Построив график уравнения на плоскости, множество всех его решений можно найти как множество упорядоченных пар чисел, служащих координатами точек графика.

(а) Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда уравнение $ax+by+c=0$ можно разрешить относительно y и получить линейную функцию $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Отсюда видно, что графики уравнения $ax + by + c = 0$ и линейной функции $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ совпадают. Но мы уже знаем, что графиком линейной функции является прямая, см. теорему 1 из 1.2. Итак, решением уравнения будут координаты любой точки прямой, проходящей через точки $(0; -\frac{c}{b})$ и $(-\frac{c}{a}; 0)$, и только они (рис. 8а).

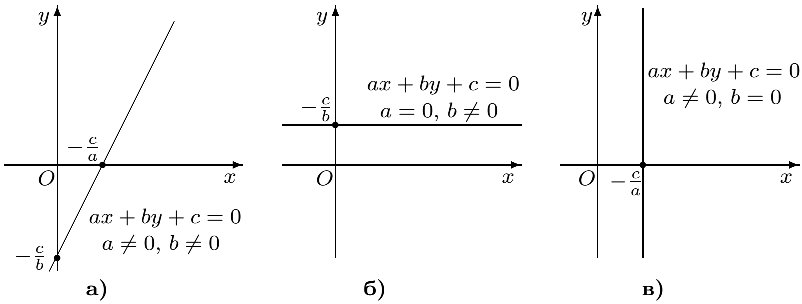


Рис. 8.

(б) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение имеет вид $0x + by + c = 0$. Разрешая это уравнение относительно y, получим линейную функцию $y = -c/b$ от переменной x, график которой и есть график нашего уравнения. Вновь привлекая теорему 1 из п. 1.2. приходим к следующему заключению. Решением этого уравнения являются координаты любой точки, прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку с координатами $(0; -c/b)$ и только они. Как видно, множество всех решений совпадает с множеством пар чисел вида $(x; -c/b)$, где x — произвольное число (рис. 8б).

(в) Если $a \neq 0$, $b = 0$, то уравнение примет вид $ax + 0y + c = 0$. Решая это уравнение относительно x получим линейную функцию $x = -c/a$ от переменной y график которой и есть график нашего уравнения. В этом случае в качестве независимой переменной выступает y, а зависимой — x.

Тогда решением уравнения являются координаты любой точки прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку с координатами $(-c/a; 0)$ и только они. Тем самым совокупность всех решений рассматриваемого уравнения — множество пар чисел вида $(-c/a; y)$, где y любое число (рис. 8в).

(г) Остается рассмотреть случай, когда коэффициенты a и b нулевые. Если $a = 0$, $b = 0$, то уравнение имеет вид $0x + 0y + c = 0$. При $c \neq 0$ это уравнение не имеет решений, следовательно график уравнения представляет собой пустое множество. При $c = 0$ уравнению удовлетворяет любая пара чисел $(x; y)$, это означает, что вся координатная плоскость xOy есть график данного уравнения.

Из сказанного выше в (а)–(г) и из теоремы 1 п. 1.2 вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Графиком уравнения $ax+by+c = 0$, коэффициенты a и b которого не равны нулю одновременно, является прямая. Наоборот, любая прямая на координатной плоскости является графиком некоторого линейного уравнения с коэффициентами при неизвестных, не равными одновременно нулю.*

На основании этого факта уравнение $ax+by+c = 0$ часто называют *уравнением прямой*. Следует подчеркнуть, что прямая, определяемая некоторым линейным уравнением, в силу установленной теоремы, единственна, тогда как одна и та же прямая задается бесконечным множеством равносильных уравнений. В самом деле, уравнения $\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$ равносильны при любом $\lambda \neq 0$, следовательно, определяют одну и ту же прямую.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение линейного уравнения с двумя неизвестными.
2. Как называют числа a, b и c в уравнении $ax + by + c = 0$?
3. Что является решением линейного уравнения с двумя неизвестными?
4. Что понимают под графическим методом решения уравнения?
5. Сколько решений имеет линейное уравнение с двумя неизвестными?
6. Что является графиком линейного уравнения с двумя неизвестными?

7. Какое множество точек является графиком линейного уравнения с двумя неизвестными?

1.4. Системы линейных уравнений с двумя неизвестными

Определения. Два или несколько уравнений образуют *систему* уравнений, если они рассматриваются с точки зрения наличия у них общих решений.

Решением системы уравнений с двумя неизвестными называется упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, которая является решением каждого из уравнений системы.

Решить систему уравнений означает найти все ее решения. Так как множество решений линейных уравнений с двумя неизвестными системы зависит от взаимного расположения графиков этих уравнений, то следует выяснить взаимное расположение графиков двух уравнений системы в зависимости от их коэффициентов.

Взаимное расположение прямых на координатной плоскости. Рассмотрим на координатной плоскости две прямые l_1 и l_2, заданные линейными уравнениями $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$, соответственно, причем коэффициенты a_i, b_i, $i=1,2$ не равны нулю одновременно. Эти прямые либо совпадают, либо параллельны, либо пересекаются в одной точке. Выясним как можно узнать по коэффициентам a_1, b_1, a_2, b_2 и свободным членам c_1, c_2, какая из этих трех возможностей имеет место в действительности.

(1) *Прямые l_1 и l_2 совпадают, если и только если существует ненулевое число λ такое, что $a_1=\lambda a_2$, $b_1=\lambda b_2$ и $c_1=\lambda c_2$.*

$\lhd$ Очевидно, указанное условие достаточно, т. е. если $a_1=\lambda a_2$, $b_1=\lambda b_2$ и $c_1=\lambda c_2$, то прямые l_1 и l_2 совпадают.

Докажем необходимость. Пусть l_1 и l_2 совпадают. Если l_1 и l_2 вертикальны, то в силу 1.3 (в) $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, $b_1=b_2=0$ и они пересекают ось абсцисс в одной и той же точке $(-c_1/a_1; 0)=(-c_2/a_2; 0)$, стало быть, $c_1/a_1=c_2/a_2$. Если $c_1=0$, то $c_2=0$ и следует положить $\lambda := a_1/a_2$. Если же $c_1\neq 0$, то $c_2\neq 0$ и полагаем $\lambda := c_1/a_1$. В обоих случаях получим требуемое условие. Если l_1 и l_2 горизонтальны, то по аналогичным соображениям из 1.3 (б) получаем $a_1=a_2=0$ и полагаем $\lambda := b_1/b_2\neq 0$, в случае $c_1=c_2=0$, и $\lambda := c_1/b_1=c_2/b_2\neq 0$, в случае $c_1\neq 0$, $c_2\neq 0$. Тем самым требуемое выполняется и в случае горизонтальных прямых.

Если прямые наклонны, то на основании 1.3 (а) можно заключить, что они проходят через две следующие точки: $(0; -c_1/b_1) = (0; -c_2/b_2)$ и $(-c_1/a_1; 0) = (-c_2/a_2; 0)$, причем коэффициенты a_1,b_1,a_2,b_2 ненулевые. Отсюда $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}$ и $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$ и далее выводим $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2}$. Полагая $\lambda := c_1/c_2$, получаем требуемое. $\rhd$

(2) *Прямые l_1 и l_2 параллельные в том и только в том случае, если существует ненулевое число λ такое, что $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ и $c_1 \neq \lambda c_2$.*

$\lhd$ Предположим, что прямые l_1 и l_2 параллельны. Если они вертикальны, то $b_1 = b_2 = 0$, значит $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$. Полагая $\lambda := a_1/a_2$, получим $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$. Если бы $c_1 = \lambda c_2$, то в силу (1) l_1 и l_2 совпадали бы, стало быть, $c_1 \neq \lambda c_2$. Аналогично обстоит дело в случае горизонтальных прямых l_1 и l_2.

Если же l_1 и l_2 наклонны, то $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$, следовательно, их уравнения можно разрешить относительно y. Отсюда видно, что l_1 и l_2 являются графиками линейных функций $y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$ и $y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$ соответственно. Как видно из 1.2 (б), условие параллельности l_1 и l_2 имеет вид $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$. Положив $\lambda := a_1/b_1$, получим требуемое условие.

Допустим теперь, что $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ и $c_1 \neq \lambda c_2$ для некоторого числа $\lambda \neq 0$. Если одна из прямых, например, l_1 вертикальна (горизонтальна), то $b_1 = 0$ (соответственно, $a_1 = 0$), поэтому $a_2 = \frac{1}{\lambda}a_1 = 0$ ($b_2 = \frac{1}{\lambda}b_1 = 0$), стало быть, вторая прямая также вертикальна (горизонтальна). Итак, в этом случае l_1 и l_2 параллельны. Если же обе прямые наклонны, то вновь все сводится к графикам линейных функций, для которых условие параллельности равносильно, в силу 1.2 (б), соотношениям $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda \neq \frac{c_1}{c_2}$. $\rhd$

(3) *Прямые l_1 и l_2 параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда $a_1b_2 = a_2b_1$.*

$\lhd$ Если l_1 и l_2 совпадают или параллельны то ввиду (1) и (2) $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ для некоторого $\lambda \neq 0$. Отсюда $a_1b_2 = (\lambda a_2)b_2 = a_2(\lambda b_2) = b_1a_2$.

Наоборот, допустим, что $a_1b_2 = a_2b_1$. Если $a_1 = 0$, то $b_1 \neq 0$, поэтому $a_2 = 0$. Точно также, если $b_1 = 0$, то $a_1 \neq 0$, поэтому $b_2 = 0$. Таким образом, прямые l_1 и l_2 вертикальны или горизонтальны одновременно, а потому параллельны или совпадают. Если же $a_2 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$, то поделив равенство $a_1b_2 = a_2b_1$ на a_2b_2, получим $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} =: \lambda$. Отсюда $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, что в силу (1) и (2) означает, что l_1 и l_2 параллельны или совпадают. $\rhd$

(4) *Прямые l_1 и l_2 пересекаются в том и только том случае, если* $a_1b_2 \neq a_2b_1$.

$\triangleleft$ Прямые пересекаются лишь в том случае, когда они не параллельны и не совпадают. Следовательно, требуемое вытекает из (3). $\triangleright$

Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Под графическим методом решения системы уравнений понимается построение графика каждого уравнения на координатной плоскости и нахождение решений системы — точек пересечения графиков этих уравнений.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Определим число решений этой системы в зависимости от значений коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 и свободных членов c_1 и c_2.

Как и выше будем считать что l_1 и l_2 — графики уравнений $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ соответственно. Тогда множество решений системы уравнений (1.1) совпадает с пересечением прямых l_1 и l_2. Здесь возможны три случая.

(а) Система уравнений (1.1) имеет бесконечное множество решений, если $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ и $c_1 = \lambda c_2$ для некоторого $\lambda \neq 0$. В самом деле, в силу 1.4 (1) прямые l_1 и l_2 совпадают.

(б) Система уравнений (1.1) не имеет решений, если $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ и $c_1 \neq \lambda c_2$ для некоторого $\lambda \neq 0$. Согласно 1.4 (2) в этом случае прямые параллельны, а значит, не имеют общих точек.

(в) Система уравнений (1.1) имеет единственное решение, если $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Как видно из 1.4 (4) в этом случае прямые l_1 и l_2 пересекаются, поэтому имеют единственную общую точку.

Замечание 1. Если коэффициенты уравнений системы (1.1) отличны от нуля, то случаи (а), (б), (в) можно переписать в виде:

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ — имеется бесконечно много решений;

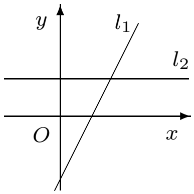
$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ — нет решений;

$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ — имеется единственное решение.

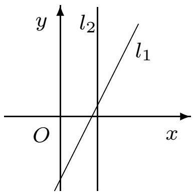
Замечание 2. Будем считать, что коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 отличны от нуля, а свободные члены c_1, c_2 равны нулю. Тогда если $a_1/a_2 = b_1/b_2$, то прямые, о которых идет речь, совпадают. Если же $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$, то прямые пересекаются в точке $O(0;0)$.

Если $c_1 = 0$, а $c_2 \neq 0$, то при $a_1/a_2 = b_1/b_2$ прямые различны и, следовательно, параллельны; а при $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$ прямые пересекаются.

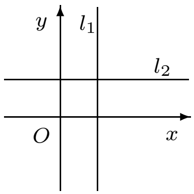
Замечание 3. Если некоторые из коэффициентов системы (1.1) равны нулю, то возможен один из следующих случаев:

1) 

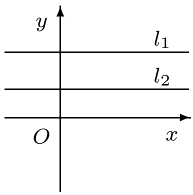
$a_2 = 0,$ $\quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ b_2y + c_2 = 0; \end{cases}$

2) 

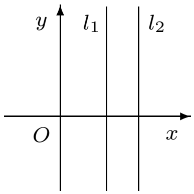
$b_2 = 0,$ $\quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + c_2 = 0; \end{cases}$

3) 

$b_1 = 0,\ a_2 = 0,$ $\quad \begin{cases} a_1x + c_1 = 0, \\ b_2y + c_2 = 0; \end{cases}$

4) 

$a_1 = 0,\ a_2 = 0,$
$b_1 \neq b_2,$ $\quad \begin{cases} b_1y + c_1 = 0, \\ b_2y + c_2 = 0; \end{cases}$

5) 

$b_1 = 0,\ b_2 = 0,$
$a_1 \neq a_2,$

$$\begin{cases} a_1x + c_1 = 0, \\ a_2x + c_2 = 0. \end{cases}$$

В случаях 1)–3) прямые пересекаются в одной точке, т. е. система имеет единственное решение. В 4-ом и 5-ом случаях, если $b_1 \neq b_2$ ($a_1 \neq a_2$), то прямые параллельны и система не имеет решений; если же $b_1 = b_2$ ($a_1 = a_2$), то указанные прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений, соответствующих точкам этой прямой [1].

Контрольные вопросы

1. Что называют системой уравнений?

2. Что называют решением системы линейных уравнений с двумя неизвестными?

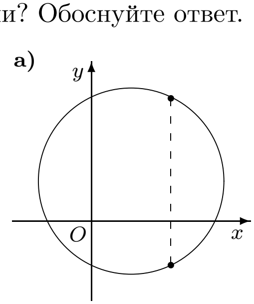
3. Что значит решить систему линейных уравнений с двумя неизвестными?

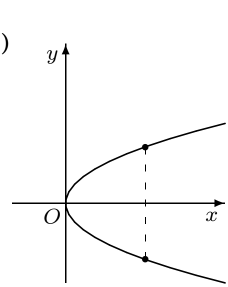
4. При каком условии прямые параллельны, совпадают, пересекаются в одной точке?

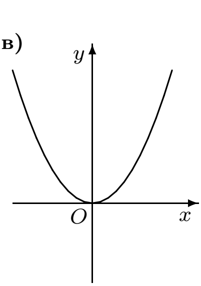
5. В каком случае система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений, не имеет решений, имеет единственное решение.

1.5. Упражнения

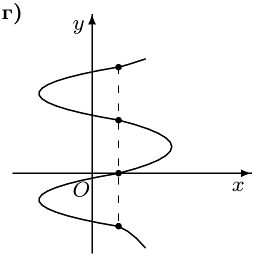
1. Укажите, на каком из рисунков а)–д) изображен график функции? Обоснуйте ответ.

а) 

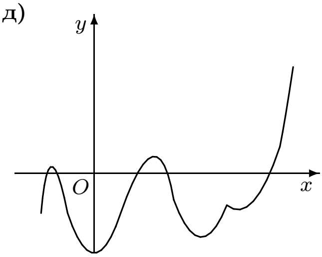
б) 

в) 

г)



д)



2. Какие из следующих функций являются линейными?

а) $y = 5x + 2$; е) $y = -3x$;

б) $y = 45 - 2x$; ж) $y = 3x^2 + 1$;

в) $y = 2x + 5x$; з) $y = 6$;

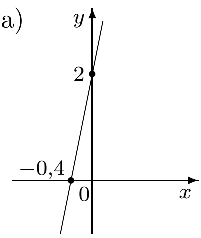
г) $y = (3x + 2)/6$; и) $y = \frac{x^2}{x} + 1$;

д) $y = \begin{cases} \frac{x^2}{x} + 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

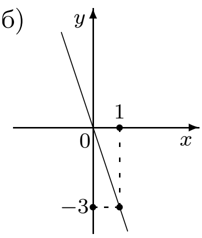
е) $y = \begin{cases} \frac{ax^2 + (a+b)x + b}{x} + 1, & \text{если } x \neq -1, \\ b - a, & \text{если } x = -1. \end{cases}$

3. Графики каких линейных функций изображены на рисунках а)–в)?

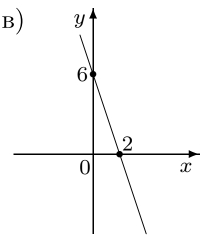
а)



б)



в)



4. Определите без построения взаимное расположение графиков данных функций (обоснуйте ответ):

а) $y = 4x$ и $y = 4x - 3$; в) $y = -0,5 + 2x$ и $y = 3x$;

б) $y = -2$ и $y = -6x + 4$; г) $y = 7x - 12$ и $y = \frac{6 - 3,5x}{0,5}$.

5. Укажите, какие из уравнений являются линейными:

а) $2x - y + 3 = 0$;
б) $5x - 4 = 0$;
в) $3x - y + 1 = 3x - y - 1$;
г) $x + 3y = 50$;
д) $y - 5 = 0$;
е) $2x^2 + y = 15$;
ж) $\frac{1}{2}x - 3y^3 + 1 = 0$;
з) $7x^2 - 2 = 0$.

6. Является ли упорядоченная пара чисел $(2; 1)$ решением уравнения

$$2x - y + 3 = 0.$$

7. Найдите множество всех решений уравнения $4x - y + 3 = 0$.

8. Докажите, что множества решений уравнений $3x + y - 2 = 0$ и $x/2 + y/6 - 1/3 = 0$ совпадают.

9. Графиком какой линейной функции является прямая, проходящая через начало координат и точку $B(-1, 3)$;

10. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(0; 4)$ и параллельной прямой $y = 3x$.

11. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $(1; 2)$ и $(3; 4)$; б) $(-1; 2)$ и $(2; -1)$.

12. Определить сколько решений имеет система уравнений:

а) $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x + y - 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 4y = 6, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$

13. Решить графически систему линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} -3x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 12 = 0. \end{cases}$$

14. Определить, имеет ли система линейных уравнений с двумя неизвестными решения:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0, \\ 4x - 4y + 2 = 0. \end{cases}$$

16. Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений имеет единственное решение, не имеет решений, имеет бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} ax + y = 5, \\ x + 2y = b - 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + (a-1)y = a, \\ 3x - ay = b + 2. \end{cases}$

17. Найти все значения параметра a, при которых прямые не пересекаются, если:

а) $y = 2ax - 1$ и $y = x + 3$,

б) $y = ax + 2$ и $x + y = a - 1$.

18. Найти все значения параметра a, при которых:

а) прямые $4ax + y = 2$ и $x + ay = 1$ пересекаются в III четверти ($x < 0$, $y < 0$);

б) прямые $y = x - 2$ и $y = 2x + a - 1$ пересекаются в IV четверти ($x > 0$, $y < 0$).

2. Линейные неравенства

2.1. Полуплоскость

Определения. Согласно *аксиоме разбиения плоскости*, каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, т. е. объединение этих полуплоскостей дает всю плоскость, а их пересечением является данная прямая. Таким образом, *полуплоскостью*, ограниченной прямой l, называется фигура, обладающая следующими свойствами:

1) она содержит прямую l, но не совпадает с ней;

2) если точки A и B принадлежат полуплоскости, но не прямой l, то отрезок AB не имеет общих точек с l;

3) если же точка A принадлежит полуплоскости, а C нет, то отрезок AC имеет с прямой l общую точку (рис. 9а) [4].

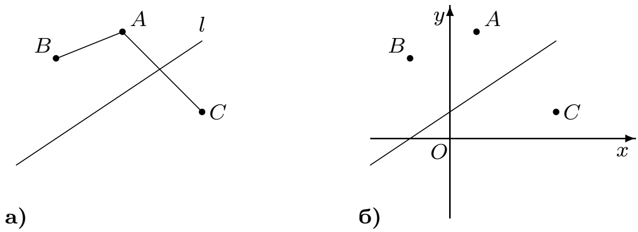


Рис. 9.

Для координат любой точки $(x; y)$ координатной плоскости, не лежащей на прямой $ax + by = c$, выполняется одно из неравенств $ax + by > c$ или $ax + by < c$. Отсюда и из определения полуплоскости следует, что если точки A и B лежат в одной полуплоскости, то на отрезке AB нет точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $ax + by = c$; если же точки A и C лежат в разных полуплоскостях, то на отрезке AC найдется точка, координаты которой удовлетворяют уравнению $ax + by = c$.

Задача (о делении отрезка в заданном соотношении). *Пусть на координатной плоскости задан отрезок A_0A_1 с началом в точ-*

ке $A_0(x_0;y_0)$ и концом в точке $A_1(x_1;y_1)$. Тогда если точка $A_t(x_t;y_t)$ лежит на отрезке A_0A_1 и $A_0A_t = t\cdot A_0A_1$ для некоторого $0<t<1$, то справедливы равенства:

$$x_t = (1-t)x_0 + tx_1, \quad y_t = (1-t)y_0 + ty_1.$$

$\lhd$ В самом деле, из подобия треугольников $A_0A_tB_t$ и $A_0A_1B_1$ видно (рис. 10), что

$$\frac{A_0B_t}{A_0B_1} = \frac{A_0A_t}{A_0A_1} = t.$$

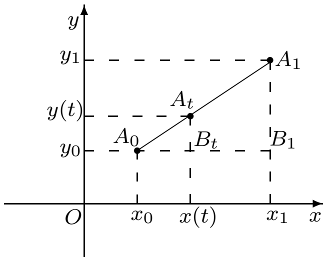


Рис. 10.

Так как $A_0B_t = x_t - x_0$ и $A_0B_1 = x_1 - x_0$, то $x_t - x_0 = t(x_1 - x_0)$, откуда $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$. Рассуждая аналогично, придем к равенству $y_t = (1-t)y_0 + ty_1$. $\rhd$

Поскольку прямая в координатной плоскости является графиком линейного уравнения $ax+by=c$, то все точки с координатами $(x;y)$ этой прямой удовлетворяют этому уравнению, а точки, не лежащие на этой прямой, не удовлетворяют этому уравнению, т.е. для любой точки координатной плоскости, не лежащей на прямой $ax+by=c$, выполняется одно из неравенств: $ax+by>c$ или $ax+by<c$.

Теорема 3. *Пусть прямая l плоскости xOy задана уравнением $ax+by=c$. Тогда одна из полуплоскостей, на которые делит эта прямая всю плоскость, состоит в точности из точек, координаты которых являются решениями неравенства $ax+by\geqslant c$, а другая — в точности из точек, координаты которых являются решениями неравенства $ax+by\leqslant c$.*

$\lhd$ Сначала докажем, что две точки $A_0(x_0;y_0)$ и $A_1(x_1;y_1)$ принадлежат разным полуплоскостям, но не лежат на прямой l, лишь в том случае, когда их координаты удовлетворяют неравенству

$$(ax_0+by_0-c)\cdot(ax_1+by_1-c)<0.$$

По определению полуплоскости точки A_0 и A_1 принадлежат разным полуплоскостям тогда и только тогда, когда отрезок A_0A_1 и прямая l имеют общую точку, например, A_t, которая делит отрезок

A_0A_1 в некотором отношении t, причем $0 < t < 1$. Тогда из выше рассмотренной задачи известно, что координаты точки $A_t(x_t; y_t)$ можно записать в виде:

$$x_t = (1-t)x_0 + tx_1, \quad y_t = (1-t)y_0 + ty_1.$$

Так как точка A_t лежит на прямой l, то ее координаты удовлетворяют уравнению $ax + by = c$, т. е.

$$a((1-t)x_0 + tx_1) + b((1-t)y_0 + ty_1) = c.$$

После выполнения тождественных преобразований и применяя очевидное равенство $(1-t)c + tc = c$, приведем полученное уравнение к виду

$$(1-t)(ax_0 + by_0 - c) + t(ax_1 + by_1 - c) = 0.$$

Обозначим $ax_0 + by_0 - c = u$, $ax_1 + by_1 - c = v$, тогда уравнение примет вид

$$(1-t)u + tv = 0$$

или

$$t(u - v) = u.$$

Тем самым пришли к линейному уравнению с одним неизвестным t и параметрами u и v. Отметим сразу же, что $u \neq 0$ и $v \neq 0$, так как точки A_0 и A_1 не лежат на прямой l.

Это уравнение имеет решение t, удовлетворяющее условию $0 < t < 1$ только в том случае, если u и v имеют разные знаки. В самом деле, если $u > 0$ и $v > 0$, то для любого $0 < t < 1$ выполняется неравенство $(1-t)u + tv > 0$; если же $u < 0$ и $v < 0$, то для такого же t справедливо неравенство $(1-t)u + tv < 0$. Если же теперь предположить, что $u \cdot v < 0$ (т. е. u и v имеют разные знаки), то легко проверить, что число $t = \frac{u}{u-v}$ является решением уравнения $t(u-v) = u$ и, кроме того, $0 < t < 1$. Действительно, в этом случае, как легко проверить, $t = \frac{u}{u-v} = \frac{|u|}{|u|+|v|}$, и выполнено условие $0 < t < 1$, поскольку числитель дроби меньше знаменателя.

Таким образом доказали, что две точки $A_0(x_0; y_0)$ и $A_1(x_1; y_1)$ принадлежат разным полуплоскостям, но не лежат на прямой l, лишь в том случае, когда их координаты удовлетворяют неравенству

$$(ax_0 + by_0 - c) \cdot (ax_1 + by_1 - c) < 0.$$

Вернемся теперь к доказательству теоремы.

Обозначим полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость, Π_1 и Π_2 соответственно. Тогда если точка $A_0(x_;y_0)$ принадлежит Π_1, но не лежит на прямой l, то выражение ax_0+by_0-c отлично от нуля. Для определенности предположим, что $ax_0+by_0-c>0$. Возьмем любую другую точку $A_1(x_1;y_1)$, не лежащую на прямой l. Если $A_1(x_1;y_1)$ принадлежит Π_1, то, в силу доказанного выше, должно выполняться неравенство $ax_1+by_1-c>0$; если точка $A_1(x_1;y_1)$ принадлежит прямой l, то выполняется равенство $ax_1+by_1-c=0$; если же точка $A_1(x_1;y_1)$ принадлежит Π_2, но не лежит на прямой l,то выполняется неравенство $ax_1+by_1-c<0$. Это означает, что все точки полуплоскости Π_1 удовлетворяют неравенству $ax_0+by_0-c\geqslant 0$, а все точки полуплоскости Π_2 удовлетворяют неравенству $ax_0+by_0-c\leqslant 0$. $\triangleright$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте аксиому разбиения плоскости.
2. Дайте определение полуплоскости.
3. Как задается полуплоскость?
4. Сформулируйте теорему о разбиении плоскости xOy прямой, заданной уравнением $ax+by=c$.

2.2. Линейные неравенства с двумя неизвестными

Определения. Неравенства вида

$$
\begin{aligned}
&ax+by<c, \quad ax+by>c,\\
&ax+by\leqslant c, \quad ax+by\geqslant c,
\end{aligned}
$$

где a, b, c — фиксированные действительные числа, а x и y — неизвестные, называют *линейными неравенствами с двумя неизвестными.* При этом верхние два неравенства называют строгими, а нижние два неравенства — нестрогими.

Решением линейного неравенства с двумя неизвестными называется такая упорядоченная пара чисел $(x_0;y_0)$, которая при подстановке в неравенство x_0 и y_0 вместо x и y соответственно, обращает его в верное числовое неравенство. *Решить* линейное неравенство с двумя неизвестными означает найти множество всех его решений.

Согласно основному принципу метода координат точке $M(x_0;y_0)$ координатной плоскости xOy соответствует упорядоченная пара действительных чисел $(x_0;y_0)$, и наоборот. Поэтому множеству упорядоченных пар ставится в соответствие множество точек координатной плоскости. Таким образом, найти множество решений линейного неравенства с двумя неизвестными означает найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих данному неравенству.

Алгоритм графического метода решения линейных неравенств с двумя неизвестными.

1. В исходном неравенстве заменить знак неравенства на равенство. Получится линейное уравнение с двумя неизвестными, соответствующее исходному неравенству.

2. Построить на координатной плоскости прямую, которая служит графиком полученного уравнения.

3. Определить, какая из полученных полуплоскостей является множеством решений исходного неравенства. Для этого взять произвольную точку плоскости, не принадлежащую данной прямой. Удобно брать в качестве такой точки начало координат $O(0;0)$, если построенная прямая не проходит через нее. Подставить координаты выбранной точки в исходное неравенство, проверить истинность полученного числового неравенства. Если неравенство истинно, то решением неравенства является полуплоскость, содержащая выбранную точку, в противном случае — полуплоскость, не содержащая выбранную точку. Показать штриховкой графическое решение неравенства.

Замечание 1. Заметим, что решением нестрогого неравенства является полуплоскость (включая точки граничной прямой), в этом случае граничная прямая изображается сплошной линией. Решением строгого неравенства является часть полуплоскости без точек граничной прямой, в этом случае граничная прямая изображается пунктирной линией.

Пример 1. Решить графически неравенство $x < 2$.

Решение. Поскольку уравнение $x = 2$ задает прямую, параллельную оси ординат, проходящую через точку $(2;0)$ то графическим изображением множества решений неравенства $x < 2$ является часть полуплоскости, не включающая точек прямой $x = 2$ (см. рис. 11).

Пример 2. Решить неравенство $2x - y \geqslant 3$.

Решение. Заменив знаком равенства знак исходного неравенства, получим уравнение $2x - y = 3$. Построим график этого уравнения (см. рис. 12).

Возьмем точку $O(0;0)$ и подставим ее координаты в левую часть неравенства. Придем к неверному числовому неравенству $0 \geqslant 3$, после чего можно заключить, что точки «верхней» полуплоскости (в которой лежит точка $O(0;0)$) не являются решениями исходного неравенства. Значит множеством решений неравенства $2x - y \geqslant 3$ является «нижняя полуплоскость», которую и нужно заштриховать.

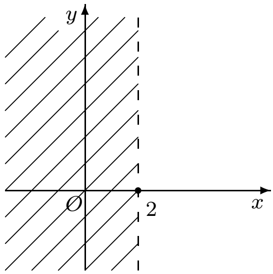


Рис. 13.

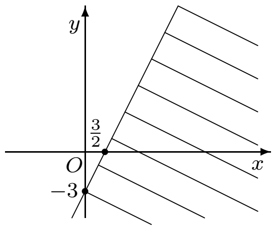


Рис. 12.

Частные случаи линейных неравенств с двумя неизвестными. Рассмотрим линейное неравенство $ax + by \leqslant c$ с двумя неизвестными x и y.

1. Если $b = 0$, то неравенство примет вид $ax \leqslant c$. Решением соответствующего уравнения $ax = c$ является вертикальная прямая, проходящая через точку $(\frac{c}{a};0)$. Множеством решений неравенства в случае, когда $a > 0$ является множество точек координатной плоскости, расположенных в «левой» полуплоскости, а если $a < 0$ — то в «правой» полуплоскости, включая точки граничной прямой $x = \frac{c}{a}$ (рис. 13).

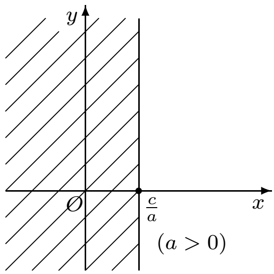


Рис. 13.

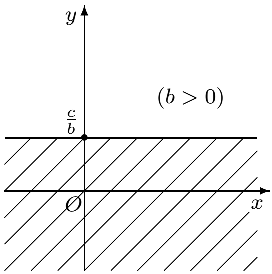


Рис. 14.

2. Если $a = 0$, то неравенство примет вид $by \leqslant c$. Решением соответствующего уравнения $by = c$ будет горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0;\frac{c}{b})$. Множеством решений неравенства в

случае, когда $b > 0$ является множество точек координатной плоскости, расположенных в «нижней» полуплоскости, а если $b < 0$ — то в «верхней» полуплоскости (рис. 14).

Контрольные вопросы

1. Какие неравенства называют линейными неравенствами с двумя неизвестными?

2. Что называют решением линейного неравенства с двумя неизвестными?

3.Что значит решить неравенство с двумя неизвестными?

4. Что является графическим изображением решения линейного неравенства с двумя неизвестными?

5. Укажите алгоритм решения линейного неравенства с двумя неизвестными.

2.3. Системы линейных неравенств с двумя неизвестными

Определения. Два или несколько неравенств образуют систему, если они рассматриваются на предмет наличия у них общих решений. *Решением* системы линейных неравенств с двумя неизвестными называется любая упорядоченная пара действительных чисел, которая является решением каждого неравенства этой системы.

Решение системы линейных неравенств с двумя неизвестными носит название *полиэдра* или *полиэдрального множества*. Существуют два вида полиэдральных множеств — ограниченные и неограниченные. Ограниченный полиэдр представляет собой выпуклый многоугольник, а неограниченный полиэдр — выпуклую часть плоскости, ограниченную незамкнутой ломаной и двумя лучами, исходящими из концов этой ломаной.

Графический метод решения системы линейных неравенств с двумя неизвестными. Графический метод решения системы неравенств подразумевает построение на координатной плоскости множества решений каждого неравенства. Пересечение этих множеств решений и дает решение системы неравенств.

Множеством решений системы двух линейных неравенств с двумя неизвестными может быть, например, полуплоскость, угол, полоса (см. рис. 15). Полоса может выродится в прямую. Кроме того, возможны еще два множества решений: пустое множество и вся плоскость.

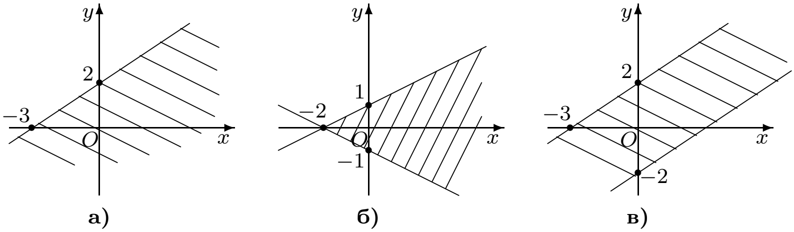


Рис. 15.

Если система состоит из трех линейных неравенств с двумя неизвестными, то решение системы может быть таким же как и множество решений системы двух линейных неравенств с двумя неизвестными (в случае, если два из трех неравенств равносильны) и, кроме того, может быть изображено в виде усеченной полосы (рис. 16а), треугольника (рис. 16б) и неограниченного полиэдра, ограниченного отрезком AB и лучами AA' и BB' (рис. 16в).

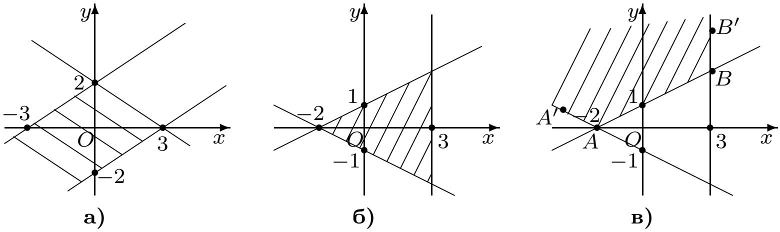


Рис. 16.

В случае, когда число линейных неравенств в системе больше трех, то множеством решений могут быть вышеуказанные множества, многоугольник и неограниченный полиэдр (например, см. рис. 21, 23).

Алгоритм графического метода решения системы линейных неравенств с двумя неизвестными.

1. Графически последовательно решаем каждое из неравенств системы.

2. Множеством решений системы неравенств будет пересечение множеств решений всех неравенств системы.

Пример 1. Решить графически систему неравенств:

$$\begin{cases} x < 0, \\ 2x - y \leqslant 3. \end{cases}$$

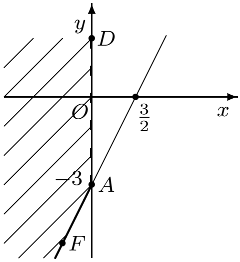


Рис. 17.

Решение. Поскольку поиск множества решений системы неравенств с двумя неизвестными был описан в предыдущем пункте (см. примеры 1, 2 п. 2.2), покажем множество решений системы неравенств, изобразив их в одной системе координат (см. рис. 17). Графическим решением системы неравенств является угол DAF без луча DA.

Пример 2. Решить графически систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y \leqslant 1{,}8, \\ 0{,}2x + 0{,}1y \leqslant 1{,}2, \\ 0{,}3x + 0{,}3y \leqslant 2{,}4, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Построим сначала графики уравнений, соответствующих каждому неравенству и найдем решение каждого неравенства системы.

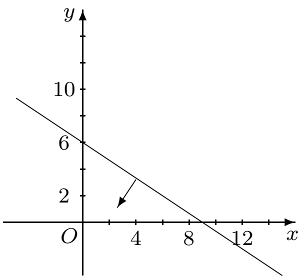


Рис. 18. Графическое решение неравенства $0{,}2x + 0{,}3y \leqslant 1{,}8$.

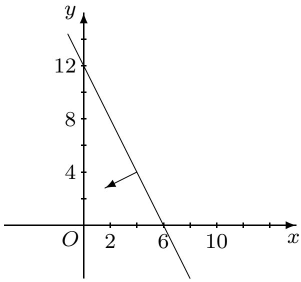


Рис. 19. Графическое решение неравенства $0{,}2x + 0{,}1y \leqslant 1{,}2$.

Графиком уравнения $0{,}2x+0{,}3y = 1{,}8$, является прямая, проходящая через точки $(0; 6)$ и $(9; 0)$. Для определения искомой полуплоскости возьмем в качестве пробной точку $(0; 0)$. Подставив абсциссу 0 и ординату 0 в левую часть уравнения, получим 0, т. е. полуплоскость, содержащая начало координат, является решением неравенства $0{,}2x + 0{,}3y \leqslant 1{,}8$ (см. рис. 18).

Графиком уравнения $0{,}2x + 0{,}1y = 1{,}2$ является прямая, проходящая через точки $(0; 12)$ и $(6; 0)$. Возьмем опять в качестве пробной точки начало координат $O(0; 0)$. Получим,что полуплоскость, содержащая начало координат, является решением исходного неравенства $0{,}2x + 0{,}1y \leqslant 1{,}2$ (см. рис. 19).

Графиком уравнения $0{,}3x + 0{,}3y = 2{,}4$ является прямая, проходящая через точки $(0; 8)$ и $(8; 0)$. Действуя также, как ранее, получим, что полуплоскость, содержащая начало координат, будет решением исходного неравенства $0{,}3x + 0{,}3y \leqslant 2{,}4$ (см. рис. 20).

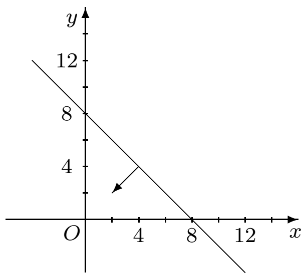


Рис. 20. Графическое решение неравенства $0{,}3x + 0{,}3y \leqslant 2{,}4$.

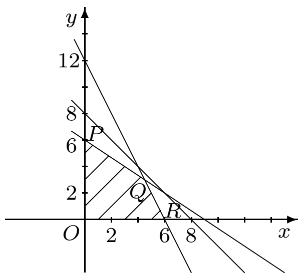


Рис. 21. Решение системы неравенств из примера 2.

Графиком уравнения $x = 0$ является прямая, совпадающая с осью Oy, которая делит координатную плоскость на две полуплоскости (условно «левую» и «правую»). Возьмем в качестве пробной точку $(1; 1)$. Следуя также, как в предыдущих случаях получим, что «правая» полуплоскость, содержащая точку $(1; 1)$ будет решением неравенства $x \geqslant 0$.

Графиком уравнения $y = 0$ является прямая, совпадающая с ось Ox, которая делит координатную плоскость на две полуплоскости: (условно «верхнюю» и «нижнюю»). Возьмем в качестве пробной точку $(1; 1)$. После вычислений получим, что «верхняя» полуплоскость, содержащая точку $(1; 1)$ будет решением неравенства $y \geqslant 0$.

Установив множества решений каждого неравенства, изобразим их в одной системе координат и найдем решение системы. Из рис. 21 видно, что графическим решением системы неравенств является заштрихованный четырехугольник $OPQR$ с вершинами $O(0; 0)$, $P(0; 6)$, $Q(4,5; 3)$, $R(6; 0)$.

Пример 3. Решить графически систему неравенств:

$$\begin{cases} 2{,}5x + 10y \geqslant 1250, \\ x + y \geqslant 250, \\ 5x + 3y \geqslant 900, \\ x \geqslant 50, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Действуя так же, как и в предыдущем примере, покажем графическое решение, каждого из шести неравенств, входящих в систему, учитывая, что последние два неравенства очевидным образом определяют I координатную четверть. Опуская разобранные выше подробности решения, представим результаты на рис. 22.

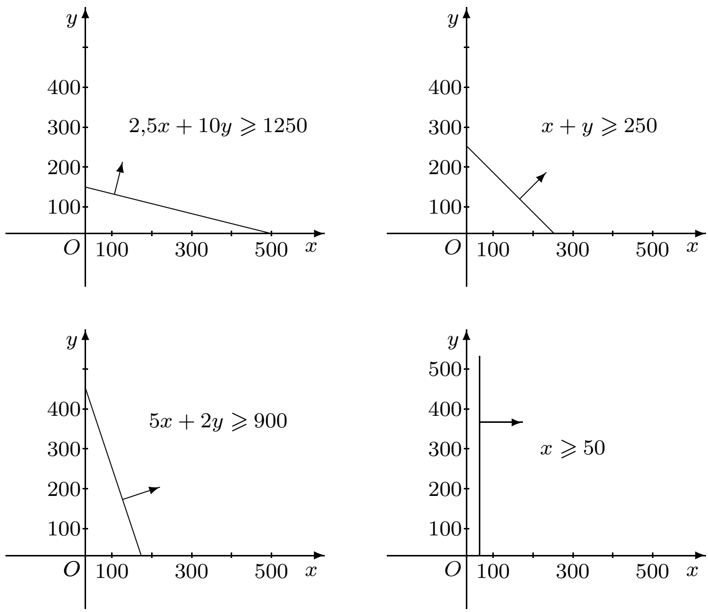


Рис. 22. Графическое решение первых четырех неравенств системы из примера 3.

Изобразим теперь графическое решение каждого неравенства в одной системе координат и найдем их пересечение. Графическим решением исходной системы неравенств является заштрихованная область (неограниченный полиэдр), которая представляет собой часть плоскости, ограниченную незамкнутой ломаной $PQRS$ и лучами PM и SN (см. рис. 23).

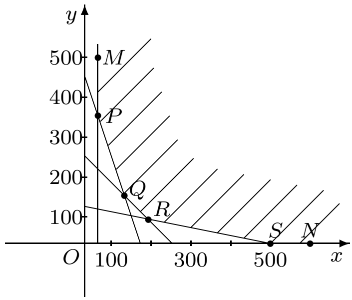


Рис. 23.

Контрольные вопросы

1. Что называют системой неравенств с двумя неизвестными?

2. Что называют решением системы линейных неравенств с двумя неизвестными?

3. Какое название носит графическое решение системы линейных неравенств с двумя неизвестными?

4. Какие множества точек могут изображать графическое решение системы линейных неравенств с двумя неизвестными?

5. Опишите алгоритм графического метода решения системы линейных неравенств с двумя неизвестными.

2.4. Упражнения

1. Решить графически неравенства:

а) $x \geqslant 5$; г) $2x + 3y \leqslant 12$; з) $x \geqslant 0$;

б) $y \leqslant 3$; д) $3x - 6y > 2$; и) $y \geqslant 0$.

в) $x + y \geqslant 10$; е) $25x + 10y - 125 > 0$;

2. Укажите, какая из упорядоченных пар чисел $(2; 2)$, $(0; 8)$, $(4,5; 3)$ является решением системы неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y \leqslant 1{,}8, \\ 0{,}2x + 0{,}1y \leqslant 1{,}2. \end{cases}$$

3. Решить графически систему неравенств с двумя неизвестными:

а) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y \leqslant 1{,}8, \\ 0{,}3x + 0{,}3y \leqslant 2{,}4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}1y \leqslant 1{,}2, \\ 0{,}3x + 0{,}3y \leqslant 2{,}4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y \leqslant 1{,}8, \\ 0{,}2x + 0{,}1y \leqslant 1{,}2, \\ 0{,}3x + 0{,}3y \leqslant 2{,}4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y \leqslant 1{,}8, \\ 0{,}2x + 0{,}1y \leqslant 1{,}2, \\ 0{,}3x + 0{,}3y \leqslant 2{,}4, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

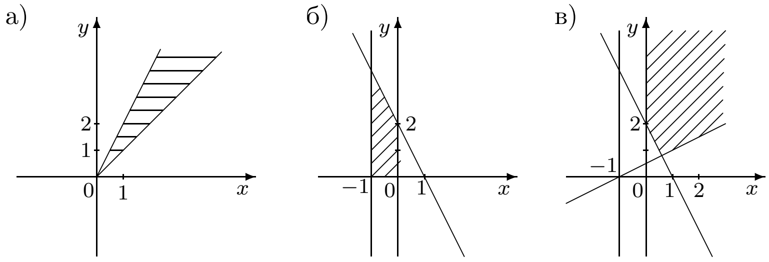
4. Построить множество точек координатной плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям:

а) $\begin{cases} x > 2, \\ y \leqslant 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y < 3, \\ x - y < 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ y > -1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x > 0, \\ x < 1, \\ x < 2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y > 0, \\ x - y < 0, \\ x - 2 < 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 0 < y < x + 2, \\ y < -x + 2; \end{cases}$

ж) $x < y < x + 1$; з) $\frac{x}{y} > 1$.

5. Задать аналитически следующие множества точек координатной плоскости, изображенные на рисунках:



6. Какие из точек $(1;0)$, $B(-3;1)$, $C(0;3)$, $D(8;4)$ лежат в полуплоскости, заданной неравенством $4x - 2y + 6 \geqslant 0$?

7. Каким из указанных ниже полуплоскостей, заданных неравенствами, принадлежит точка $A(5;2)$:

а) $3x - 4y + 1 < 0$; в) $-4x + 5y - 11 > 0$;

б) $7x + y - 16 \geqslant 0$; г) $15x - 12y + 71 \leqslant 0$?

8. Принадлежит ли точка $A(1;-6)$ множеству решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} 3x - 4y + 1 > 0, \\ 2x + 5y + 7 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 6y + 1 > 0, \\ x + 3y + 8 < 0. \end{cases}$

9. Среди решений $(x; y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \geqslant 3, \\ 2x - y \leqslant 1, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$$

найти все, для которых выражение $x^2 + y^2$ принимает максимальное значение.

10. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} x + y \leqslant 3, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x + 2y \geqslant 2, \\ y + 4x \leqslant a; \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11. Придумайте примеры систем неравенств, графическим решением которых будут:

а) параллелограмм;
б) внутренняя часть угла;
в) полоса между параллельными прямыми;
г) единственная точка;
д) пустое множество.

12. Укажите примеры систем линейных неравенств с двумя неизвестными, графическое решение которых представимо на рис. 15, 16.

3. Некоторые линейные модели

В современной науке широко используется метод моделирования. Математическая модель — это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Однако моделирование — это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им.

Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. Например, нельзя поставить натурный эксперимент в истории, чтобы проверить, «что было бы, если бы...». Невозможно проверить правильность той или иной космологической теории. В принципе возможно, но вряд ли разумно, поставить эксперимент по какой-либо болезни, например, чумы, или осуществить ядерный взрыв, чтобы изучить его последствия. Однако все это можно сделать на компьютере, построив предварительно математические модели изучаемых явлений.

Основные этапы математического моделирования таковы.

1. *Построение модели.* На этом этапе задается некоторый «нематематический» объект — явление природы, конструкция, экономический план, производственный процесс и т. д. При этом, как правило, четкое описание ситуации затруднено. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем качественные зависимости формулируются на языке математики, то есть строится математическая модель. Это самая трудная стадия моделирования.

2. *Решение математической задачи, к которой приводит модель.* На этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов задачи на ЭВМ, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за допустимое время.

3. *Интерпретация полученных следствий из математической*

модели. Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области.

4. *Проверка адекватности модели.* На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.

5. *Модификация модели.* На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения [16].

Существует ряд прикладных задач, математические модели которых строятся с помощью линейных уравнений и неравенств, а также их систем. Такие модели называются *линейными.* В этой главе будут рассмотрены некоторые из таких задач.

3.1. Текстовые задачи

Первое знакомство с простейшими математическими моделями у школьников происходит при решении текстовых задач. Стандартная схема решения текстовых задач состоит из трех этапов:

1. *Формализация задачи.* Выбор неизвестных и составление уравнений (возможно, неравенств). Выбрав неизвестные, следует составить уравнения (балансовые соотношения) или неравенства (ограничения), которые соответствуют условию задачи.

2. *Решение математической модели.* На этом этапе решают уравнения, неравенства или системы, т. е. находят неизвестное или нужную комбинацию неизвестных.

3. *Интерпретация.* На этом этапе полученное математическое решение переводится на язык исходной ситуации.

Рассмотрим несколько текстовых задач, некоторые из которых взяты из различных учебных пособий для учащихся, увлеченных математикой.

Задача Ньютона [19]. Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней?

Решение. Для того, чтобы решить эту задачу, надо составить уравнение или систему уравнений, которые представляют собой модель данной задачи.

Заданные в задаче величины — количество коров и число дней — не связаны непосредственно, поэтому введем следующие вспомогательные неизвестные — параметры — для установления связи между основными величинами.

Пусть на лугу первоначально было a единиц травы, и ежедневно на нем вырастает b единиц травы. Пусть каждая корова за 1 день съедает c единиц травы. Тогда в соответствии с условием получаем следующее.

За 24 дня всего вырастет $(a + 24b)$ единиц травы, которую за это время съедают 70 коров. Однако 70 коров за 24 дня съедают $24 \cdot 70 \cdot c = 1680c$ единиц травы, следовательно, $a + 24b = 1680c$.

По условию, 30 коров съедают всю траву за 60 дней, поэтому получаем:

$$a + 60b = 1800c.$$

За 96 дней на лугу вырастет всего $a+96b$ единиц травы, которую за это время съедят искомое число x коров. Всего они съедят $96xc$ единиц травы, следовательно получим уравнение:

$$a + 96b = 96xc.$$

Эти уравнения образуют систему, которая и есть модель исходной задачи. Эту систему нужно решить относительно искомого x.

$$\begin{cases} a + 24b = 1680c, \\ a + 60b = 1800c, \\ a + 96b = 96xc. \end{cases}$$

Вычтем почленно из второго уравнения первое уравнение, после чего получим: $36b = 120c$. Отсюда

$$c = 0{,}3b.$$

Подставив полученное значение c в первое уравнение, получим $a + 24b = 504b$, откуда

$$a = 480b.$$

Подставив полученные выражения для c и a в третье уравнение системы, приходим к равенству

$$480b + 96b = 28{,}8xb$$

или $576b = 28{,}8xb$. Наконец, сократив предварительно на b, получим $x = 20$.

Ответ: 20 коров.

Эта задача является практической и интересна тем, что ее моделью является система, состоящая из линейного уравнение с одним неизвестным и тремя параметрами (a, b, c) и двух линейных уравнений, являющихся ограничениями. В ходе решения задачи определяется связь между ними, которая позволяет решить это линейное уравнение, не находя предварительно значений параметров. Задача имеет точный ответ.

Задача экономной хозяйки. При консервировании компотов из яблок и слив хозяйка пользуется следующим рецептом: вес яблок в баллоне должен быть не меньше веса слив, но и не должен превосходить его более, чем в три раза. Известно, что 1 кг слив стоит 40 руб., а 1 кг яблок — 20 руб. Сколько килограммов слив и яблок можно купить на сумму от 300 до 500 руб., учитывая соотношение веса фруктов в рецепте? Сколько кг слив и яблок нужно купить так, чтобы вес яблок оказался наибольшим из возможных?

Решение. Пусть хозяйка купила x кг слив и y кг яблок. Тогда общая стоимость покупки равна $40x + 20y$ руб. По условию задачи хозяйка должна потратить сумму от 300 до 500 руб., т. е. должны выполняться неравенства $40x+20y \leqslant 500$ и $40x+20y \geqslant 300$. При этом числа x и y должны быть неотрицательными ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) и, кроме того, соотношения между весом слив и яблок должны удовлетворять условиям $x \leqslant y \leqslant 3x$.

Таким образом, требуется решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 40x + 20y \leqslant 500, \\ 40x + 20y \geqslant 300, \\ x \leqslant y \leqslant 3x, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Решать систему неравенств будем графически. После тождественных преобразований система примет вид:

$$\begin{cases} 2x + y \leqslant 25, \\ 2x + y \geqslant 15, \\ x - y \leqslant 0, \\ y - 3x \leqslant 0, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Применив алгоритм графического решения системы неравенств, предложенный в п. 2.3., получим графическое решение данной системы (рис. 24).

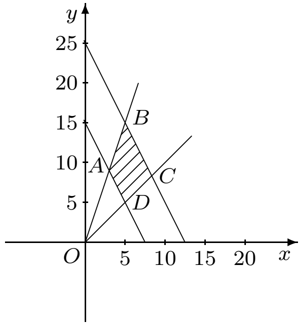


Рис. 24.

Полученное графическое решение системы неравенств — трапеция $ABCD$, дает представление обо всех возможных решениях задачи.

Таким образом, задача имеет множество решений. Например, решениями будут пары: $x = 7$, $y = 10$ и $x = 6$, $y = 9$, т. е. можно купить 7 кг яблок и 10 кг слив, или 6 кг яблок и 9 кг слив. Ответом на второй вопрос задачи является пара $(5; 15)$. т. е. при покупке 5 кг слив и 15 кг яблок вес яблок будет наибольший из возможных.

Задача на смеси [18]**.** Имеются три смеси, составленные из трех компонентов A, B, C. В первую смесь входят только компоненты A и B в весовом отношении $3 : 5$, во вторую — только B и C в весовом отношении $1 : 2$, а в третью — только A и C в отношении $2 : 3$. В каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси компоненты A, B, C были в отношении $3 : 5 : 2$?

Решение. Напомним, что означает «в таком-то весовом отношении». Пусть имеется P граммов смеси, в которой вещества A и B содержатся в отношении $3 : 5$. Это означает, что если в смеси a г вещества A и b г вещества B, то $a + b = P$ и $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

Аналогично если имеется Q граммов смеси, в которой вещества A, B, C содержатся в отношении $3 : 5 : 2$, и a, b, c — их соответственные веса, то $a + b + c = Q$ и $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, $\frac{b}{c} = \frac{5}{2}$.

Приступим к решению задачи. Пусть нужно взять x г первой смеси, y г второй и z г третьей. Пусть a и b — количества веществ A и B, содержащихся в x г первой смеси. По условию задачи имеем $a + b = x$ и $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$, откуда $a = \frac{3}{8}x$, $b = \frac{5}{8}x$.

Аналогично находим, что в y граммах второй смеси присутствуют $y/3$ граммов вещества B и $\frac{2}{3}y$ граммов вещества C. И, наконец, в z граммах третьей смеси присутствуют $\frac{2}{5}z$ граммов вещества A и $\frac{3}{5}z$ граммов вещества C.

Всего вещества A в полученной смеси из трех смесей будет $\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z$ граммов. Вещества B там же будет граммов $\frac{5}{8}x + \frac{1}{3}y$, а вещества C — $\frac{2}{3}y + \frac{3}{5}z$ граммов.

Запишем теперь тот факт, что вещества A, B, C в полученной смеси должны содержаться в соотношении $3 : 5 : 2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{3}{8}x + \frac{2}{5}z}{\frac{5}{8}x + \frac{1}{3}y} = \frac{3}{5}, \\ \dfrac{\frac{5}{8}x + \frac{1}{3}y}{\frac{2}{3}y + \frac{3}{5}z} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Эта система нелинейна, но эквивалентна линейной, так что из нее легко находится, что $y = 2z$, $x = \frac{20}{3}z$. Отсюда, $x : y = \frac{20}{3} : 2$, $y : z = 2 : 1$, так что наше отношение можно записать в виде $\frac{20}{3} : 2 : 1$, или, что то же самое, $20 : 6 : 3$.

Ответ: эти смеси надо взять в отношении $20 : 6 : 3$.

3.2. Модель равномерного прямолинейного движения

Рассмотрим равномерное прямолинейное движение. Движение происходит в пространстве и во времени, поэтому для его математического описания необходимы математические модели пространства и времени. В случае прямолинейного движения роль пространства играет прямая, математическая модель которой — множество действительных чисел — возникает путем введения на ней системы координат (см. § 1.1).

Аналогичным образом вводится математическая модель времени. Время обладает следующими важными свойствами:

1) течение времени имеет направление от прошлого к будущему, причем время неограничено как в прошлом, так и в будущем;

2) если фиксировать какой-нибудь момент времени, то любой другой момент времени является либо прошлым, либо будущим по отношению к фиксированному моменту времени;

3) время измеримо, т. е. возможно зафиксировать единицу измерения времени и тогда любой промежуток времени можно измерить, получив в результате вещественное число и, наоборот, всякому вещественному числу соответствует какой-нибудь промежуток времени.

На основании перечисленных трех свойств принимается следующий постулат: *существует взаимно однозначное соответствие между всеми моментами времени и всеми действительными числами* (*или точками координатной прямой*).

Таким образом, в качестве математической модели времени принимается множество действительных чисел или же геометрически — координатная прямая.

В дальнейшем, говоря о времени, предполагаем, что фиксирован момент отсчета времени, соответствующий значению $t = 0$, единица измерения времени и направление течения времени. Более того, допуская вольность речи, не различаются момент времени и соответствующее вещественное число, а также промежуток времени и соответствующий отрезок числовой прямой.

Рассмотрим движение материальной точки вдоль прямой. На прямой введем систему координат. Тогда положение точки на прямой определяется ее координатой. С течением времени движущаяся точка меняет свое положение, поэтому ее координата зависит от времени. Пусть $x(t)$ — координата точки в момент времени t, где $a \leqslant t \leqslant b$, т. е. рассматриваем движение точки в промежуток времени от a до b. Функция $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ полностью определяет движение точки. Эту функцию принято назвать *законом движения* точки (см. рис. 25).

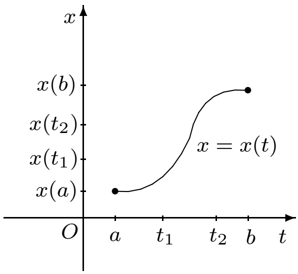


Рис. 25.

Возьмем произвольно значения t_1 и t_2, где $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$. Разность $x(t_2) - x(t_1)$ называется *перемещением* точки за промежуток времени $[t_1; t_2]$. Из определения видно, что перемещение точки — положительное число, если точка движется в положительном направлении и отрицательное число, если точка движется в отрицательном направлении.

Равномерным прямолинейным движением называется движение, при котором материальная точка, двигаясь вдоль прямой, за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения. Точнее, движение точки по прямой равномерно, если для любых двух различных отрезков времени $[t_1; t_2]$, $[t_1'; t_2']$ таких, что $t_2 - t_1 = t_2' - t_1'$, выполняется равенство $x(t_2) - x(t_1) = x(t_2') - x(t_1')$. Возникает вопрос: какой конкретный вид имеет закон равномерного прямолинейного движения? Иными словами, какова функция, описывающая равномерное прямолинейное движение? Для ответа на этот вопрос необходим следующий математический результат. (Доказательство см., например, в [14]).

Теорема 4. *Пусть f есть числовая функция, которая определена и непрерывна на отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$, содержащем точку* 0. *Предполо-*

жим, что для любых $x, y \in [a;\, b]$, таких, что $x + y \in [a;\, b]$, выполняется равенство:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Тогда существует число $k \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $x \in [a;\, b]$ выполняется равенство $f(x) = kx$.

Используя эту теорему, можем теперь определить явный вид функции, описывающей равномерное прямолинейное движение.

Теорема 5. *Если функция $x :\ [a;\, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и прямолинейное движение точки, описываемое этой функцией, равномерно, то существует число $v \in \mathbb{R}$ такое, что $x(t_2) - x(t_1) = v(t_2 - t_1)$ для любых $t_1, t_2 \in [a;\, b]$.*

$\triangleleft$ Положим $l := b - a$ и определим функцию $f : [0;\, l] \to \mathbb{R}$ формулой

$$f(u) := x(a + u) - x(a) \quad (u \in [0;\, b]).$$

Возьмем такие числа $u_1, u_2 \in [0,\, l]$, что $u_1 + u_2 \leqslant l$. Обозначим $t_1 := a$, $t_2 := a + u_2$ и $t_3 := a + u_1 + u_2$. Тогда

$$f(u_1 + u_2) = x(t_3) - x(t_1) = x(t_3) - x(t_2) + x(t_2) - x(t_1).$$

По определению функции f имеем $x(t_2) - x(t_1) = x(a + u_2) - x(a) = f(u_2)$. Так как $t_3 - t_2 = u_1 = (a + u_1) - a$, то в силу условия равномерности движения выполняется также

$$x(t_3) - x(t_2) = x(a + u_1) - x(a) = f(u_1).$$

Таким образом, $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$. Функция f непрерывна в силу непрерывности x. Как видно, функция f удовлетворяет условиям теоремы 4, поэтому она имеет вид $f(t) = vt$ $(t \in [0;\, l])$, где v — некоторая постоянная.

Теперь для любых $t_1, t_2 \in [a;\, b]$ при $t_1 \leqslant t_2$, пользуясь равенством перемещений на равных отрезках $[t_1;\, t_2]$ и $[a,\, a + t_2 - t_1]$, выводим

$$x(t_2) - x(t_1) = x(a + t_2 - t_1) - x(a) = f(t_2 - t_1) = v(t_2 - t_1). \ \triangleright$$

Из доказанного ясно, что *закон равномерного прямолинейного движения* имеет вид

$$x(t) = x(t_0) + v(t - t_0),$$

где $t_0 \in [a;\, b]$ — фиксированный момент времени. Константу v называют *скоростью* равномерного движения. Таким образом, скорость прямолинейного равномерного движения — постоянная величина, которая в любом промежутке времени $[t_1;\, t_2]$ может быть выражена формулой:

$$v = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Знак скорости зависит от знака числителя, так как $t_2 > t_1$. Если движение происходит в направлении оси Ox $(x(t_2) > x(t_1))$, то скорость положительна, если же движение происходит в противоположном направлении $(x(t_2) < x(t_1))$, то скорость отрицательна.

Длина отрезка, соединяющего начальное $x(t_1)$ и конечное $x(t_2)$ положения точки в промежутке времени $[t_1; t_2]$ называют *путем,* пройденным за этот промежуток. Если в течение рассматриваемого промежутка времени направление движения не изменяется, то путь совпадает с модулем перемещения. Пройденный путь часто обозначают буквой S, т. е. $S = |x(t_2) - x(t_1)|$. Если обозначить $t := t_2 - t_1$, то получим хорошо знакомую формулу: $S = vt$.

Задача [5]. Два всадника выезжают одновременно из A и B навстречу друг другу. Первый прибывает в B через 27 минут, а второй в A через 12 минут после встречи. За какое время проехал каждый всадник путь AB?

Решение. Обозначим через t время через которое всадники встретятся, а через v_1 и v_2 — скорости первого и второго всадников соответственно. Тогда расстояние, которое проехал до встречи I всадник равно $v_1 t$, расстояние, которое проехал до встречи II всадник — $v_2 t$. Будем считать, что v_1 и v_2 — параметры, тогда по условию задачи можно составить систему линейных уравнений относительно t:

$$\begin{cases} v_1 t = 12 v_2, \\ v_2 t = 27 v_1. \end{cases}$$

Разделив почленно первое уравнение системы на второе получим равенство $v_1 = \frac{2}{3} v_2$, которое позволяет найти значение t из какого-либо уравнения системы. Тогда получим, что $t = 18$. Таким образом, время, за которое I всадник проехал путь AB равно $18 + 27 = 45$ минут, а время, за которое II всадник проехал этот путь равно $18 + 12 = 30$ минут. Ответ: 45 мин., 30 мин.

3.3. Модель рыночного равновесия

Пусть требуется определить цену на определенный товар, при которой возможны оптимальная покупательная способность и наибольший объем продаж данного товара в условиях изменения цены на него. Введем необходимые экономические понятия.

Спрос S на данный товар — это потребность в определенном количестве товара, ограниченная действующими ценами и платежеспособностью потребителей.

Предложение D — количество товара, которое может быть представлено на рынке для продажи по данной цене.

Предложение и спрос зависят от цены на товар. Так, например, для того, чтобы производитель увеличил количество товара, цена на товар должна быть выше существующей, т. е. предложение есть функция от цены: $D = f(p)$, где p — цена товара.

Спрос также является функцией от цены, однако в отличие от предложения, с увеличением цены на товар спрос на этот товар уменьшается: $S = g(p)$, где p — цена товара.

Заметим, что функция предложения f — функция возрастающая, а функция спроса g — функция убывающая. В экономике график зависимости предложения от цены называется *кривой предложения*, а график зависимости спроса от цены называется *кривой спроса.*

Конкретный вид зависимостей f и g может быть получен путем обработки статистических данных или из общеэкономических соображений. Часто предполагают, что f и g линейные функции, т. е.

$$D = k_1 p + b_1, \qquad S = k_2 p + b_2,$$

причем $k_1 > 0$, $k_2 < 0$. Приведем графики функций предложения D (см. рис. 26) и спроса S (см. рис. 27), учитывая, что $p \geqslant 0$.

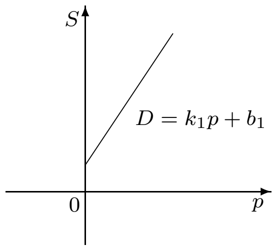


Рис. 26.

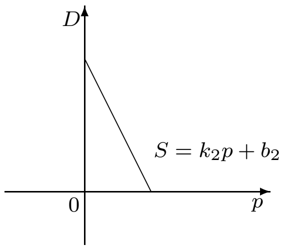


Рис. 27.

Поскольку нас интересует спрос и предложение на один и тот же товар, то единицы измерения спроса и предложения одни и те же. Поэтому, обозначив количество товара буквой Q, построим кривые спроса и предложения в одной системе координат (рис. 28).

Точка пересечения графиков функций спроса и предложения называется *точкой равновесия*, а соответствующая ей цена — *равновесной ценой.* Эти названия связаны с тем, что в точке равновесия спрос приходит в соответствие с предложением, т. е. весь произведенный товар находит своего покупателя, и все желающие могут купить данный товар по этой цепи.

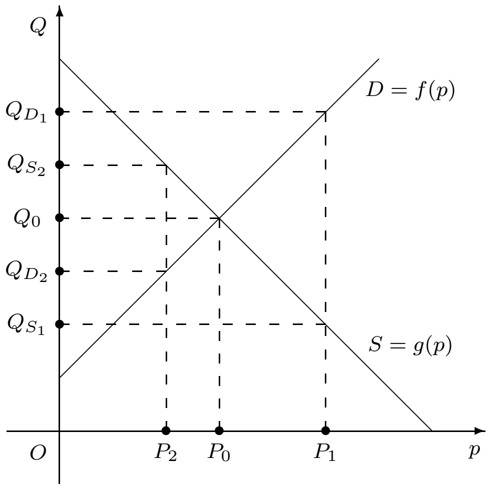


Рис. 28.

Важной характеристикой рыночного процесса является *отклонение рыночной цены от равновесной.* Из рисунка 28 видно, что если рыночная цена P_1 больше равновесной цены P_0, то количество товара Q_{S_1}, отвечающее спросу, меньше количества товара Q_{D_1}, отвечающего предложению, т. е. предложение превышает спрос. Следствием этого будет оседание нереализованной продукции на складах. В свою очередь это будет побуждать производителей уменьшить цену на продукцию, т. е. рыночная цена P_1 будет стремиться к равновесной цене P_0. Это явление известно как «давление рынка».

Если рыночная цена P_2 будет меньше равновесной цены P_0, то количество товара Q_{S_2}, отвечающее спросу, больше количества товара Q_{D_2}, отвечающего предложению, т. е. спрос превышает предложение. Следствием этого будет наличие дефицита товара, что, в свою очередь, будет побуждать производителей повышать цену на продукцию, т. е. рыночная цена P_2 будет снова стремиться к равновесной цене P_0. Таким образом мы построили модель рыночного равновесия, выраженную линейной функцией, которая характеризует состояние рынка при повышении или понижении цены на определенный товар.

3.4. Модель национального дохода

Одним из важнейших показателей успешности хозяйственной деятельности государства является *национальный доход.* Подсчет национального дохода представляет собой достаточно сложную задачу. Для ее решения используются модели различной сложности. Рассмотрим простейшую односекторную модель экономики. В этой модели продукция экономики считается *однородной*, т. е. состоящей из одного продукта. Обычно под *однородным* продуктом понимают национальный доход, под *потреблением* — все непроизводственное потребление, как отдельных лиц, так и государства, включая затраты на оборону, образование, управление и т. д. *Национальный доход* — совокупность материальных ценностей, произведенных в стране за год, за вычетом всех материальных затрат.

Введем обозначения: Y — национальный доход, C — потребление, I — чистые капиталовложения в развитие производства, называемые инвестициями. Тогда имеет место равенство:

$$Y = C + I.$$

Потребление C является функцией от дохода Y. Поскольку с увеличением дохода Y растет и потребление C, это означает, что $C = f(Y)$ — функция возрастающая.

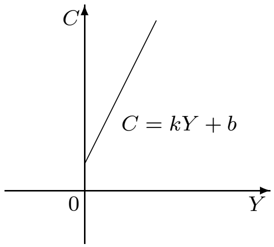


Рис. 29.

Предположим, что $C = f(Y)$ — линейная функция, т. е.

$$C = kY + b,$$

где k — коэффициент, называемый *предельной склонностью к потреблению*, b — называют *автономным потреблением*, т. е. потреблением при нулевом доходе (потребление запасов). Очевидно, что $0 \leqslant k \leqslant 1$.

График потребления представлен на рис. 29. Параметры k и b определяются из статистических данных. Уровень капиталовложений I также задан. Таким образом, переменные I, k и b играют роль параметров модели, их называют *внешними переменными*. Переменные Y и C, значения которых надо определить, т. е. выразить через внешние переменные (параметры) называют *внутренними переменными* модели. Имеем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными Y и C:

$$\begin{cases} Y = C + I, \\ C = kY + b. \end{cases}$$

Подставляя выражение для C из второго уравнения в первое, находим последовательно

$$Y = kY + b + I,$$
$$(1 - k)Y = b + I,$$
$$Y = \frac{b + 1}{1 - k}.$$

Мы получили общее выражение, позволяющее вычислить национальный доход Y. Подставляя это выражение в функцию потребления, можно найти величину C

$$C = \frac{k(b + 1)}{1 - k} + b.$$

Приведенная линейная модель национального дохода позволяет исследовать и прогнозировать возможные результаты экономического развития страны.

3.5. Упражнения

1. Цена 1 м шелка — 30 руб., а 1 м сукна — 40 руб. Сколько шелка и сукна можно купить, заплатив не более 200 руб.? Изобразите ответ множеством точек координатной плоскости.

2. Требуется перевезти 120 т груза на пятитонных и восьмитонных грузовиках. Сколько нужно грузовиков той или другой грузоподъемности, если общее число грузовиков не превышает 20? Составьте систему неравенств и изобразите ее решение на чертеже. Перечислите все ответы.

3. В бассейн проведено 5 труб разного диаметра. Известно, что все они могут заполнить бассейн за 6 часов. Если будут открыты краны II, IV и V труб, то бассейн заполнится за 12 часов, а если открыть краны III и V труб, то — за 16 часов. За какое время заполнят бассейн I и IV трубы?

4. В бассейн проведено 6 труб разного диаметра, которые могут заполнить бассейн за 6 часов, а I, II, III и VI трубы — за 12 часов. Если будут открыты краны только II, III и IV труб, то — за 8 часов, а если открыть краны IV, V и VI труб, то за 24 часа. За какое время заполнят бассейн I и V трубы?

5. Две группы туристов должны идти навстречу друг другу из турбаз A и B, расстояние между которыми 30 км. Если первая группа выйдет на 2 ч раньше второй, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второй группы. Если же вторая группа выйдет на 2 ч раньше, чем первая, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первой группы. С какой средней скоростью идет каждая группа?

6. На полях, выделенных агролабораторией для опытов, с двух участков собрали 14,7 ц зерна. На следующий год после применения новых методов агротехники урожай на первом участке повысился на 80%, а на втором —на 24%, благодаря чему с этих же участков было собрано 21,42 ц зерна. Сколько центнеров зерна собирают с каждого участка после применения новых методов агротехники?

7. За 1 кг одного продукта заплачено 20 руб. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 18,2 руб. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

8. Моторная лодка и парусник, находясь на озере на расстоянии 30 км друг от друга, движутся навстречу друг другу и встречаются через 1 ч. Если бы моторная лодка находилась в 20 км и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 ч 20 мин. Определить скорости лодки и парусника.

9. Если неизвестное двузначное число разделить на число, изображенное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4, а в остатке 3. Если же искомое число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8, а в остатке 7. Найти это число.

10. В два сосуда одинаковой массы налита вода, причем масса сосуда A с водой составляет 4/5 массы сосуда B с водой. Если воду из сосуда B перелить в сосуд A, то масса его вместе с водой станет в 8 раз больше массы сосуда B. Найти массу сосудов и количество воды в них зная, что в сосуде B содержится воды на 50 г больше, чем в сосуде A.

11. Кристалл, находясь в стадии формирования, равномерно наращивает свою массу. Наблюдая формирование двух кристаллов, заметили, что первый из них за 3 мес. дал такой же прирост массы, как второй за 7 мес. Однако по истечении года оказалось, что первый кристалл увеличил свою первоначальную массу на 4%, а второй — на 5%. Найти отношение первоначальных масс этих кристаллов.

Ответы: 3) 16 ч; 4) 12 ч; 5) 5 и 3 км/ч; 6) 10, 26, 11, 16 ц; 7) 1,2 и 8 р; 8) 18 и 12 км/ч; 9) 71; 10) 50, 150 и 200 г; 11) 35:12.

4. Элементы линейного программирования

4.1. Общая характеристика задач линейного программирования

В своей практической деятельности, направленной на достижение поставленной цели, человек стремится к наилучшему или как еще говорят *оптимальному* (в том или ином смысле) способу действия, если имеется возможность выбора из множества различных способов действия, приводящих к этой цели. Если способы действия или стратегии характеризуются какой-нибудь величиной, то задача выбора наилучшей (оптимальной) стратегии сводится к нахождению *максимума* или *минимума*, т. е. наибольшего или наименьшего значения этой величины.

Два понятия — максимум и минимум — принято выражать одним термином — *экстремум*. Поэтому задачи на нахождение максимума или минимума называют *экстремальными задачами* или *оптимизационными задачами*. Методы исследования и решения различного рода экстремальных задач составляют раздел математики, называемый *теорией экстремальных задач* или *теорией оптимизации*.

Задача нахождения оптимальной стратегии в практических задачах возникает, как правило, в описательной форме. Применение математических средств для изучения такой задачи предполагает три этапа, о которых уже говорилось в 3.1 в связи с текстовыми задачами: формализация (или построение математической модели), анализ математической модели, интерпретация.

При формализации практических задач на нахождение максимума или минимума возникает математическая задача, точная постановка которой включает три составляющие: 1) какое-то множество X, которое моделирует совокупность всех стратегий или способов действия; числовая функция f, определенная на множестве X, показывающая в каком смысле стратегия должна быть наилучшей; некоторое подмножество C множества X, выделяемое ограничительными или регулирующими условиями задачи (последние часто выражаются системами уравнений и неравенств). Сама задача заключается в том, чтобы *найти такой элемент* x_0 *в множестве* C*, для которого значение функции* $f(x_0)$ *является наименьшим (наибольшим) в множестве всех значений* $\{f(x): x \in C\}$ и символически записывается в виде:

$$x \in C \quad f(x) \to \min\,(\max).$$

Если в этой задаче функция f линейна, а множество C задается системой линейных уравнений и неравенств, то говорят о *линейной экстремальной задаче* или *линейной оптимизационной задаче*. Раздел теории экстремальных задач, посвященный методам анализа и решения линейных оптимизационных задач, принято называть *линейным программированием*.

Линейное программирование относится к числу наиболее широко распространенных методов анализа управляющих решений, используемых при решении производственных и коммерческих задач. Любая задача линейного программирования включает три основных элемента: *управляемые переменные*, *целевую функцию* и *ограничения*.

Управляемые переменные. Управляемые переменные задачи зависят от типа рассматриваемой задачи. Ими могут быть, например, количества размещаемых ресурсов или же количества производимых единиц продукции. Принимающий управляющее решение ищет такие значения этих переменных, обозначаемых, как правило, через $x, y, z \ldots$ или $x_1, x_2, x_3, \ldots$, которые доставляют *оптимальное* (*наилучшее*) *решение* рассматриваемой им задачи. Выбор конкретных значений для управляемых переменных — это и есть управляющее решение, а определенная свобода такого выбора — возможность управления.

Целевая функция. *Целевой* называют функцию, зависящую от управляемых переменных и характеризующую степень близости к некоторой желаемой цели. Наличие целевой функции позволяет осмыслить что же такое оптимальное решение. Именно, оптимальными будут те значения управляемых переменных, при которых целевая функция принимает максимальное или минимальное значение. В задачах линейного программирования речь идет об оптимизации единственной цели, записанной в виде линейной функции $ax + by + cz + \ldots$ или $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots$ Таким образом, ищется либо максимальное значение желаемой цели (прибыли, доли рынка и т. п.) или же минимальное значение нежелательного результата (полные расходы, отходы и т. п.).

Ограничения. Как уже сказано выше, принимающий управляющие решения ищет такие значения управляемых переменных, которые доставляют максимум или минимум целевой функции. Однако такой поиск ведется при некоторых ограничивающих или регулирующих условиях, включенных в постановку задачи и не подлежащих изменению для данной задачи. Такие условия выражаются в виде линейных неравенств и равенств и называются *ограничениями.*

Неуправляемые переменные. Помимо этого в математическое выражение целевой функции и ограничений входят некоторые постоянные величины, называемые *неуправляемыми параметрами.* Параметры, входящие в целевую функцию ($a, b, c, \ldots$ или $a_1, a_2, a_3, \ldots$ см. выше), называют *коэффициентами прибыли издержек.* Они выражают скорость, с которой значение целевой функции убывает или возрастает при изменении управляемых переменных.

В линейные выражения ограничений входят также некоторые коэффициенты при управляемых переменных. Они называются *технологическими коэффициентами* и выражают скорость, с которой данные ресурсы истощаются или используются.

Из истории линейного программирования. Честь открытия линейного программирования принадлежит Леониду Витальевичу Канторовичу (1912–1986) — выдающемуся советскому ученому, внесшему существенный вклад в математическую и экономическую науки. История этого открытия поучительна.

В 1938 году к молодому профессору Ленинградского университета обратились сотрудники Центральной лаборатории Ленинградского фанерного треста с просьбой рекомендовать численный метод расчета рационального плана загрузки имеющегося оборудования. Размышляя над этой задачей, Л. В. Канторович развил математическую теорию с многочисленными экономическими приложениями. Эти результаты он опубликовал в 1939 г. в брошюре «Математические методы организации и планирования промышленного производства», ознаменовавшей рождение линейного программирования. В ней впервые давалась математическая постановка производственных задач оптимального планирования, предлагались эффективные методы их решения, а также приемы экономического анализа этих задач. Тем самым, идея оптимальности в экономике была поставлена на прочный научный фундамент. Однако экономические идеи Л. В. Канторовича не вполне соответствовали официальной политической экономии. Он был вынужден на долгие годы свернуть свои экономические исследования, но продолжал интенсивно работать в области математики. В 1959 году он смог, наконец, опубликовать книгу «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», законченную еще в 1942 году. С этого момента и до конца своей жизни он работал уже преимущественно в области экономики.

Исследования по линейному программированию на Западе начались несколько позже, в начале 1940-х годов, и были связаны с задачами боеспособности армии. Мировая война, а затем период холодной войны сделали недоступными советские исследования для западных ученых. В результате, некоторые идеи

Л. В. Канторовича были переоткрыты заново. В 1947 году Дж. Данцинг разработал численный способ решения этих задач, симплекс-метод, весьма схожий со схемой Л. В. Канторовича. В том же году Дж. фон Нейман, основоположник математической теории игр, развил концепцию двойственности в линейном программировании, неявно содержащуюся в теории Л. В. Канторовича. В 1950 году пионерская работа Л. В. Канторовича, упомянутая выше, зафиксировавшая открытие линейного программирования, была переведена на английский язык. Его заслуги были признаны на Западе. Выдающийся американский специалист в области линейного программирования Дж. Данцинг в своей книге, опубликованной в 1966 г. «Линейное программирование, его применение и обобщения» отмечал: «Работа Л. В. Канторовича в 1939 г. содержит почти все области приложений, известные в 1960 г.» В 1975 году Л. В. Канторович за выдающийся вклад в развитие математико-экономического направления удостоен (вместе с американским экономистом Т. Купмансом) Нобелевской премии по экономике.

Ниже мы рассмотрим две простейшие производственные задачи и покажем, что их математическая формализация приводит к задачам линейного программирования.

4.2. Задача «двух картошек»

Постановка задачи. Некоторая фирма специализируется на производстве пищевых полуфабрикатов. Подвергая определенной обработке картофель, она производит три различных продукта: Д — картофельные дольки, К — картофельные кубики и Х — картофельные хлопья. В начале технологического процесса необработанный картофель сортируется по размеру и качеству, затем распределяется по различным поточным линиям. Фирма может закупать картофель у двух различных поставщиков А и Б. При этом объемы продуктов Д, К и Х, которые можно получить из одной тонны картофеля первого поставщика, отличаются от объемов продуктов Д, К и Х, получаемых из того же количества картофеля второго поставщика. Соответствующие показатели приведены в таблице 1.

Из этой таблицы видно, что из 1 т картофеля поставщика А можно изготовить 0,2 т продукта Д, 0,2 т продукта К и 0,3 т продукта Х; остальные 0,3 т составляют отходы. У картофеля поставщика Б несколько иные показатели: из 1 т можно изготовить 0,3 т продукта Д, 0,1 т продукта К и 0,3 т продукта Х; отходы составят также 0,3 т.

Прибыль при покупке картофеля у того или иного поставщика вычисляется путем вычитания из полной выручки в результате продажи фирмой всех видов продуктов, полученных из 1 т необработанного картофеля, стоимости 1 т картофеля. Согласно таблице предполагается, что прибыли фирмы при закупке картофеля у поставщиков

А и Б составляют соответственно 5 и 6 единиц прибыли.

Управляющему фирмой нужно решить следующую задачу: какое количество картофеля следует закупить у каждого из поставщиков, с тем, чтобы получить максимально возможную прибыль.

Таблица 1. Задача «двух картошек»

Продукт	Поставщик		Ограничение на объем выпускаемой продукции
	А	Б	
Д	0,2	0,3	1,8
К	0,2	0,1	1,2
Х	0,3	0,3	2,4
Прибыль	5	6	Максимизировать
Количество картофеля	x_1	x_2	—

Для принятия решения по закупке картофеля должны также учитываться, по крайней мере, еще два других фактора: максимальное количество каждого из продуктов, которое фирма может продать, и максимальное количество каждого из продуктов, которые фирма может изготовить при данных условиях производства. Для простоты изложения допустим, что, учитывая оба эти фактора одновременно, мы получаем следующие ограничения:

1) продукт Д не может выпускаться в количестве, превышающем 1,8 т;

2) продукт К не может выпускаться в количестве, превышающем 1,2 т;

3) продукт Х не может выпускаться в количестве, превышающем 2,4 т.

Теперь задача сформулирована полностью, и можно приступить к построению математической модели.

Управляемые переменные. Управляемыми переменными в данной задаче будут:

x_1 — количество картофеля в тоннах, которое покупается у поставщика А;

x_2 — количество картофеля в тоннах, которое покупается у поставщика Б.

При этом фиксированную пару чисел $(x_1; x_2)$ естественно называть *планом закупок.*

Целевая функция. Прибыль фирмы, получаемая от картофеля поставщика А, равна $5x_1$, (т. е. прибыль от одной тонны картофеля умноженная на количество тонн). Аналогично, прибыль фирмы от картофеля поставщика Б составит $6x_2$. Таким образом, полная прибыль фирмы при плане закупок $(x_1; x_2)$ будет равна $(5x_1 + 6x_2)$. Напомним, что при этом фирма стремится выбрать план закупок так, чтобы достичь максимально возможной прибыли.

Ограничения.

1. Ограничение на продукт Д. По условию задачи продукт Д может выпускаться в количестве, не превышающем 1,8 т. При плане закупок $(x_1; x_2)$ из картофеля поставщика А будет изготовлено $0{,}2x_1$ т продукта Д, а из картофеля поставщика Б — $0{,}3x_2$ т продукта Д. Следовательно для полного выпуска продукта Д получаем такое ограничение:

$$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 1{,}8.$$

2. Ограничение на продукт К. Продукт К может выпускаться в количестве, не превышающем 1,2 т. При плане закупок $(x_1; x_2)$ из картофеля поставщика А будет изготовлено $0{,}2x_1$ т продукта К, а из картофеля поставщика Б — $0{,}1x_2$ т продукта К. Следовательно для полного выпуска продукта К получаем ограничение:

$$0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \leqslant 1{,}2.$$

3. Ограничение на продукт Х. Продукт Х может выпускаться в количестве, не превышающем 2,4 т. При плане закупок $(x_1; x_2)$ из картофеля поставщиков А и Б будет изготовлено соответственно $0{,}3x_1$ т и $0{,}1x_2$ т продукта Х. Следовательно, для полного выпуска продукта Х имеем ограничение:

$$0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 2{,}4.$$

4. Неотрицательность. Невозможно закупить отрицательное количество картофеля, значит оба числа x_1 и x_2 неотрицательны:

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Множество всех планов $(x_1; x_2)$, удовлетворяющих всем четырем ограничениям задачи, называют *допустимым множеством* или *множеством допустимых решений* (*планов*).

Подводя итог, можно сформулировать математическую модель задачи «двух картошек» следующим образом: *найти план закупок картофеля* $(x_1; x_2)$ *доставляющий максимум целевой функции* на множестве допустимых решений. Символически, эта задача записывается так:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \to \max, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 1{,}8, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \leqslant 1{,}2, \\ 0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 2{,}4, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

4.3. Графический способ решения задачи «двух картошек»

Множество допустимых решений (рис. 30). Графическое решение задачи линейного программирования проводят в два этапа: сначала на координатной плоскости изображают множество допустимых решений, затем в этом множестве находят оптимальное решение. При этом, ввиду условия неотрицательности, все построения проводят в первой четверти ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$).

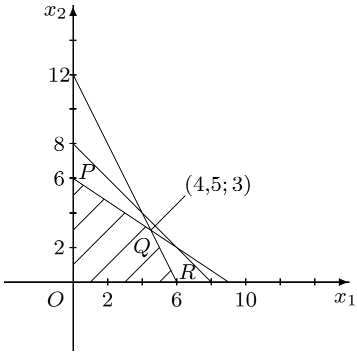


Рис. 30.

Рассмотрим задачу «двух картошек». Чтобы изобразить множество допустимых решений, нужно нарисовать решение каждого из пяти неравенств, входящих в ограничения задачи. Графическое решение этой системы неравенств было подробно рассмотрено в п. 2.3. Поэтому приведем лишь последний этап нахождения решения системы неравенств.

Заштрихованная область на рис. 30 есть пересечение пяти полуплоскостей. Она представляет собой четырехугольник $OPQR$ с вершинами $O(0;0)$, $P(0;6)$, $Q(4{,}5;3)$, $R(6;0)$. Любая точка из этого четырехугольника является допустимым решением рассматриваемой задачи, так как ее координаты удовлетворяют всем ограничениям.

Семейство прямых постоянной прибыли (рис. 31). Как мы видели, имеется бесконечное множество допустимых решений. Среди них необходимо найти одно такое, которое максимизирует целевую функцию $z = 5x_1 + 6x_2$. Последнее равенство можно рассматривать как бесконечное множество уравнений, зависящее от параметра z. При изменении z получаем уравнения параллельного семейства прямых на плоскости. Положение каждой из прямых зависит от значения z. Так, например, если $z = 15$, то получаем уравнение прямой $5x_1 + 6x_2 = 15$, на которой расположены точки $N(3; 0)$ и $M(0; 2{,}5)$. Вдоль этой прямой целевая функция принимает постоянное значение, равное 15. На рис. 31 изображены еще две прямые $M'N'$ и $M''N''$ из этого семейства, соответствующие значениям $z = 30$ и $z = 45$.

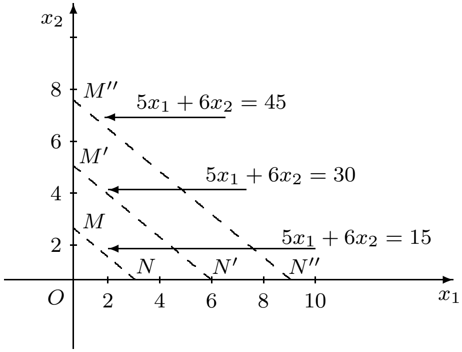


Рис. 31.

Выбор оптимального решения (рис. 32). Уровень прибыли на прямой $M'N'$ больше, чем на MN, а на $M''N''$ больше, чем на $M'N'$. Таким образом, при движении прямой от начала координат уровень прибыли повышается, а так как мы стремимся к максимально возможной прибыли, то нас интересуют прямые постоянной прибыли, находящиеся подальше от начала координат. Однако прямая $M''N''$ не пересекается с допустимой областью $OPQR$, т. е. не встречает ни одной допустимой точки, следовательно, уровень прибыли $z = 45$ недостижим в области $OPQR$. Таким образом, прямую MN можно двигать от начала координат (в северо-восточном направлении) до тех пор, пока она не займет крайнее положение VW так, что при дальнейшем движении она покидает область $OPQR$ (см. рис. 32).

Теперь можно заключить, что допустимая точка $Q(4{,}5; 3)$, лежащая на прямой постоянной прибыли VW, является оптимальным решением. Значение целевой функции в этой точке равно $5 \cdot 4{,}5 + 6 \cdot 3 = 40{,}5$. В частности, уравнение прямой VW имеет вид $5x_1 + 6x_2 = 40{,}5$.

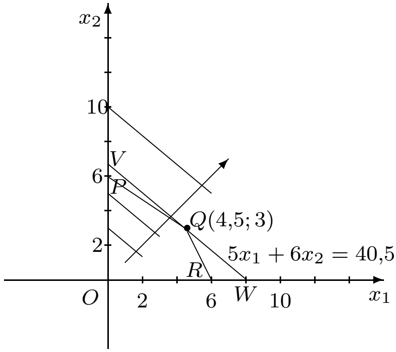


Рис. 32.

Таким образом, искомый план закупок $(4{,}5;3)$ означает, что максимальная прибыль может быть получена если закупить 4,5 т картофеля у поставщика A и 3 т картофеля у поставщика B. Задача имеет единственное решение.

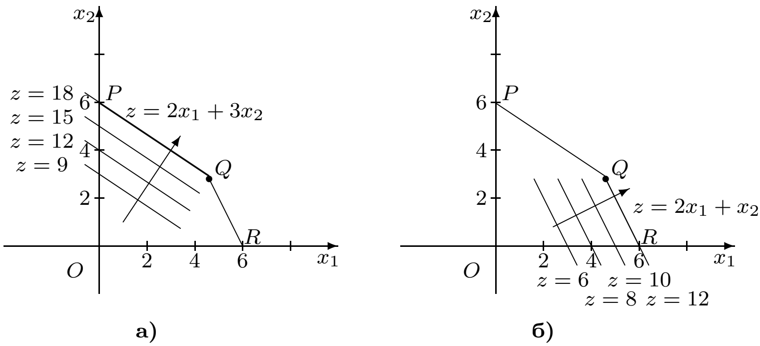


Рис. 33. Неединственность оптимального решения.

Альтернативные оптимальные решения (рис. 33). Как видно из приведенного графического анализа, точка $Q(4{,}5;3)$ является единственным оптимальным решением задачи «двух картошек». Если изменить коэффициенты целевой функции, то направление (т. е. угол наклона к оси абсцисс) семейства прямых постоянной прибыли станет другим. Допустим, что эти прямые параллельны отрезку PQ. Это соответствует целевой функции вида $z = 2x_1 + 3x_2$ (см. рис. 33,а). Тогда прямая VW (т. е. крайнее положение прямой MN, после которого она покидает допустимое множество в северо-западном направлении), проходит через отрезок PQ. В этом случае все точки отрезка PQ будут оптимальными решениями.

Аналогичные рассуждения справедливы относительно отрезка QR и целевой функции $z = 2x_1 + x_2$ (см. рис. 33,б). В этом случае все точки отрезка QR будут оптимальными решениями, при этом задача имеет множество решений.

4.4. Задача о рационе

Постановка задачи. Эта задача связана с животноводческой проблемой кормления животных наиболее экономным образом, но в то же время с соблюдением обходимых требований питательности. Предположим, что некоторая свиноферма покупает зерно двух различных видов $З_1$ и $З_2$ и приготавливает из них различные виды смесей (комбикормов). Различные зерновые культуры содержат разное количество питательных компонентов (ингредиентов). Допустим, принимаются в расчет четыре основных компонента, которые обозначим условно А, Б, В и Г. Количества питательных ингредиентов, содержащихся в единице веса каждого из видов зерна $З_1$ и $З_2$, приведены в таблице 2. Ниже единицу веса будем сокращенно обозначать через ед.

Таблица 2. Задача о рационе

Ингредиент	Единицы веса		Минимальные потребности на планируемый период
	$З_1$	$З_2$	
Ингредиент А	2,5	10	1250
Ингредиент Б	1	1	250
Ингредиент В	5	2	900
Ингредиент Г	1	0	50
Затраты в расчете на единицу веса	41	35	Минимизировать
Количество зерна	x_1	x_2	—

Управляющему свинофермой известны минимально возможные нормы потребления каждого из ингредиентов, следовательно, комбикорм для свиней должен удовлетворять некоторым минимальным требованиям с точки зрения питательности. Допустим, что в выбранный период планирования (например, две недели) нормы потребления таковы:

1) ингредиент А необходим в количестве не меньше, чем 1250;

2) ингредиент Б необходим в количестве не меньше, чем 250;
3) ингредиент В необходим в количестве не меньше, чем 900;
4) ингредиент Г необходим в количестве не меньше, чем 50.

В этих условиях управляющий стремится определить, какая из всех возможных смесей является самой дешевой. Иными словами, требуется при соблюдении указанных норм потребления питательных компонентов составить комбикорм с минимальными затратами.

Составим теперь математическую модель задачи о рационе.

Управляемые переменные:

x_1 — количество (ед.) зерна в смеси З$_1$;

x_2 — количество (ед.) зерна в смеси З$_2$.

Фиксированную пару чисел $(x_1; x_2)$ естественно называть рационом или диетой.

Целевая функция. Так как цена одной ед. зерна З$_1$ равна 41, то x_1 ед. зерна З$_1$ стоит $41x_1$. Аналогично, стоимость x_2 ед. зерна З$_2$ равна $35x_2$. Следовательно, полные затраты фирмы при составлении рациона $(x_1; x_2)$ составят $z = 41x_1 + 35x_2$. Это и есть целевая функция, которую следует минимизировать.

Ограничения.

1. Ограничение на ингредиент А. По условию задачи минимальная норма потребления ингредиента А равна 1250. Из таблицы 2 видно, что количество ингредиента А, содержащееся в x_1 ед. зерна З$_1$ и x_2 ед. зерна З$_2$ равно соответственно $2{,}5x_1$ и $10x_2$. Тем самым, в рационе $(x_1; x_2)$ ингредиент А содержится в количестве $2{,}5x_1 + 10x_2$ и приходим к ограничению:

$$2{,}5x_1 + 10x_2 \geqslant 1250.$$

2. Ограничение на ингредиент Б. Минимальная норма потребления ингредиента Б равна 250. Количество ингредиента Б, содержащееся в каждом из видов зерна совпадает с количеством (в единицах веса) взятого зерна, так как и для З$_1$ и для З$_2$ в единице веса содержится одна единица ингредиента Б. Тем самым, в рационе $(x_1; x_2)$ ингредиент Б содержится в количестве $x_1 + x_2$ и получаем ограничение:

$$x_1 + x_2 \geqslant 250.$$

3. Ограничение на ингредиент В. Минимальная норма потребления ингредиента В равна 900. Как видно из таблицы количество ингредиента В, содержащееся в x_1 ед. зерна З$_1$ и x_2 ед. зерна З$_2$

равно соответственно $5x_1$ и $3x_2$. Значит, в рационе $(x_1; x_2)$ ингредиент В содержится в количестве $5x_1 + 3x_2$ и приходим к ограничению:

$$5x_1 + 3x_2 \geqslant 900.$$

4. Ограничение на ингредиент Г. В единице веса зерна З$_1$ содержится единица ингредиента Г, а в зерне З$_2$ его нет вовсе. Так как минимальная норма потребления ингредиента Г равна 50, то соответствующее ограничение можно записать в виде:

$$x_1 + 0 \cdot x_2 \geqslant 50.$$

5. Неотрицательность. Количество зерна в смеси неотрицательно, значит:

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Множество всех рационов $(x_1; x_2)$, удовлетворяющих всем пяти ограничениям задачи, называют *допустимым множеством или множеством допустимых решений* (*рационов*).

Подводя итог, можно сформулировать математическую модель задачи о рационе следующим образом: *найти рацион* $(x_1; x_2)$, *доставляющий минимум целевой функции* на множестве допустимых решений, символически:

$$\begin{cases} 41x_1 + 35x_2 \to \min, \\ 2{,}5x_1 + 10x_2 \geqslant 1250, \\ x_1 + x_2 \geqslant 250, \\ 5x_1 + 3x_2 \geqslant 900, \\ x_1 + 0x_2 \geqslant 50, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

4.5. Графический способ решения задачи о рационе

Изложенный в п. 2.3 (пример 3) графический метод решения системы неравенств с элементарными оговорками можно применить к задаче о рационе.

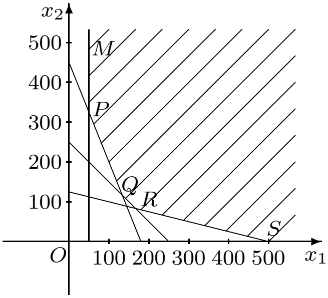


Рис. 34. Область допустимых стратегий задачи о рационе.

Ограничения. Действуя так же, как и в п. 2.3, изобразим на плоскости решение каждого из шести неравенств, входящих в ограничения задачи. Опуская разобранные выше подробности графического решения системы, представим результаты на рис. 34. Как видно, в отличие от допустимого множества задачи «двух картошек» полученная допустимая полуплоскость не содержит начала координат. Это связано с тем, что неравенства в ограничениях задачи о рационе имеют противоположный смысл («больше или равно»).

Область допустимых стратегий. Область допустимых стратегий или просто допустимое множество, изображено на рис. 34 (заштрихованный участок). Как видно, допустимая область представляет собой неограниченную часть плоскости, ограниченную ломаной $PQRS$ и лучами PM и SN. Координаты точек P, Q, R и S определяются соответственно из систем уравнений:

$$P: \quad \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 900, \\ \qquad x_1 = 50; \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 50, \ x_2 = 325;$$

$$Q: \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 250, \\ 5x_1 + 2x_2 = 900; \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 133\frac{1}{3}, \ x_2 = 116\frac{2}{3};$$

$$R: \quad \begin{cases} 2{,}5x_1 + 10x_2 = 1250, \\ x_1 + x_2 = 250; \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 166\frac{2}{3}, \ x_2 = 83\frac{1}{3};$$

$$S: \quad \begin{cases} 2{,}5x_1 + 10x_2 = 1250, \\ x_2 = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 500, \ x_2 = 0.$$

Итак, $P(50; 325)$, $Q(133\frac{1}{3}; 116\frac{2}{3})$, $R(166\frac{2}{3}; 83\frac{1}{3})$, $S(500; 0)$.

Выбор оптимального решения. На рис. 35 пунктиром изображено семейство параллельных прямых, представляющих различные уровни целевой функции. Так как целевая функция $z = 41x_1 + 35x_2$ выражает затраты фирмы, то эти прямые можно назвать *прямыми постоянных затрат*. На прямой $M''N''$ уровень затрат составляет 21525, на прямой $M'N'$ — 14350 и на прямой MN — 4100. Таким образом, уровень затрат уменьшается при движении прямой к началу координат (т. е. в юго-западном направлении). Такое движение возможно до тех пор, пока прямая не займет крайнее положение VW так, что при дальнейшем движении она покидает допустимую область, ограниченную ломаной $PQRS$ (см. рис. 35).

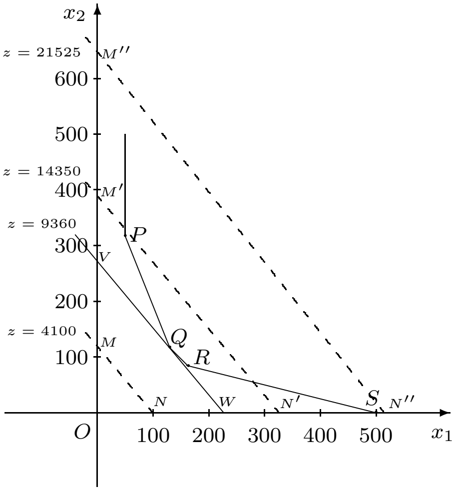


Рис. 35. Поиск оптимального решения.

Теперь можно заключить, что точка Q $\left(133\frac{1}{3}; 116\frac{2}{3}\right)$, лежащая на прямой постоянных затрат VW, является оптимальным решением. Значение целевой функции в этой точке равно $41 \cdot 133\frac{1}{3} + 35 \cdot 116\frac{2}{3} = 9550$. В частности уравнение прямой VW имеет вид $41x_1 + 35x_2 = 9550$. Таким образом, оптимальный рацион $(133\frac{1}{3}; 116\frac{2}{3})$ означает, что минимальные затраты при составлении допустимой диеты в комбикорме достигаются при закупки $133\frac{1}{3}$ ед. зерна вида $З_1$ и $116\frac{2}{3}$ ед. зерна вида $З_2$.

4.6. Крайние точки

Множество допустимых решений представляет собой многоугольник $OPQR$ в случае задачи «двух картошек» (см. рис. 30) и неограниченную часть плоскости, ограниченную ломаной $PQRS$ и лучами PM и SN, в задаче о рационе (см. рис. 34). В том и другом случае допустимое множество обладает свойством: отрезок прямой, соединяющей две произвольным образом выбранные точки из рассматриваемого множества, содержится в этом же множестве. Множество, удовлетворяющее такому свойству, называют *выпуклым*. Наше наблюдение носит общий характер. Именно, *допустимое множество задачи линейного программирования (с любым числом управляемых переменных и любым числом ограничений типа «меньше или равно», «больше или равно», «равно») является выпуклым.*

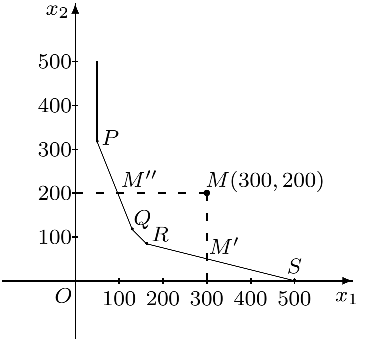


Рис. 36. Крайние точки допустимого множества.

Точки P, Q, R и S называют *крайними точками* допустимого множества (см. рис. 36). Крайняя точка определяется тем свойством, что она не может принадлежать внутренней части никакого отрезка, соединяющего две точки рассматриваемого множества. На рис. 30 крайними точками допустимого множества будут O, P, Q и R. Чтобы выяснить роль крайних точек рассмотрим еще раз допустимое множество задачи о рационе и выберем в нем точку $M(300; 200)$ (см. рис. 36).

Эта точка изображает допустимую диету: 300 ед. зерна $З_1$ и 200 ед. зерна $З_2$. Такая диета не оптимальна, так как количество зерна $З_1$ можно уменьшить, двигаясь горизонтально от точки M до точки $M'' = (100; 200)$, причем полные затраты также уменьшаются. Аналогично, при движении вертикально от точки M к точке $M' = (300; 50)$ количество зерна $З_2$ уменьшается вместе с полными затратами. В обоих случаях комбикорм содержит необходимое количество всех ингредиентов. Таким образом, оптимальное решение не может находиться внутри допустимого множества, а является его граничной точкой, т. е. лежит на ломаной $PQRS$. Более внимательный анализ показывает, что оптимальным решением будет хотя бы одна из крайних точек допустимого множества. Фактически здесь имеет место общее утверждение:

Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то непременно существует оптимальное решение, являющееся крайней точкой допустимого множества.

Перебор крайних точек. Из сказанного следует, что *оптимальное решение задачи линейного программирования можно найти путем перебора крайних точек.*

а) В задаче «двух картошек» крайними точками допустимого множества являются O $(0; 0)$, P $(0; 6)$, Q $(4{,}5; 3)$, R $(6; 0)$. В результате перебора крайних точек приходим к тому же результату, что и в п. 4.3 (см. таблицу 3).

Таблица 3. Перебор крайних точек в задаче «двух картошек»

Крайняя точка	Координаты	Значение целевой функции
P	(0; 0)	$5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0$
Q	(0; 6)	$5 \cdot 0 + 6 \cdot 6 = 36$
R	(4,5; 3)	$5 \cdot 4{,}5 + 6 \cdot 3 = 40{,}5$
S	(6; 0)	$5 \cdot 6 + 6 \cdot 0 = 30$

б) В задаче о рационе допустимое множество имеет четыре крайние точки P, Q, R и S. Нужно найти значения целевой функции в этих точках, сравнить полученные значения и выбрать точку с наименьшим значением целевой функции. Это проделано в таблице 4.

Как видно, наименьшее значение целевой функции будет $z = 9550$ в точке Q $(133\frac{1}{3}; 116\frac{2}{3})$, т. е. приходим к тому же результату, что и в п. 4.5 (см. таблицу 4).

Таблица 4. Перебор крайних точек в задаче о рационе

Крайняя точка	Координаты	Полные затраты
P	$(50; 325)$	$41 \cdot 50 + 35 \cdot 325 = 13425$
Q	$(133\frac{1}{3}; 116\frac{2}{3})$	$41 \cdot 133\frac{1}{3} + 35 \cdot 116\frac{2}{3} = 9550$
R	$(166\frac{2}{3}; 83\frac{1}{3})$	$41 \cdot 166\frac{2}{3} + 35 \cdot 83\frac{1}{3} = 9750$
S	$(500; 0)$	$41 \cdot 550 + 35 \cdot 0 = 22550$

Способ решения задач линейного программирования, основанный на переборе крайних точек, хотя и возможен в принципе, но совершенно неприемлем с вычислительной точки зрения ввиду астрономического числа крайних точек у множеств, описываемых системами линейных неравенств. Например, такое простое множество как m-мерный куб

$$B := \{x = (x_1, \ldots, x_m) : \ 0 \leqslant x_i, \ i := 1, \ldots, m\}$$

имеет 2^m крайних точек! Для достаточно скромного для практических приложений количества переменных $m = 100$ это число превосходит количество наносекунд, прошедших со времен Большого Взрыва — момента возникновения нашей Вселенной. Даже самый мощный суперкомпьютер не справится с задачей прямого перебора всех крайних точек в таких задачах, поэтому нужен метод их направленного перебора с максимальным отсевом неперспективных вариантов. Одной из наиболее успешных идей в этом направлении стал симплекс-метод, предложенный Дж. Данцигом. Он будет изложен в следующей главе.

4.7. Упражнения

1. Фирма производит два вида изделий. Прибыль от единицы изделия А составляет 60, а от единицы изделия Б — 50. Каждое изделие проходит обработку на двух станках C_1 и C_2. Изделие А обрабатывается 10 минут на станке C_1 и 8 минут на станке C_2. Изделие Б требует 20 минут на станке C_1 и 5 минут на станке C_2. Станки задействованы также и в других производствах, поэтому они могут быть заняты в изготовлении указанных изделий лишь некоторое время: 200 минут в день — станок C_1 и 80 минут в день — станок C_2. Фирма обязана производить ежедневно два изделия А и пять изделий Б. Если какое-то изделие не удалось закончить в отведенное время, то его можно доделать на следующий день, т. е. в дневном плане может быть помимо некоторого количества целых изделий и любая часть одного изделия. Каков наиболее выгодный дневной производственный план?

а) Построить математическую модель.

б) Решить задачу графически.

2. Предположим, что для двух видов продукции (обозначим их $П_1$ и $П_2$) требуются материальные, трудовые и финансовые ресурсы. Наличие ресурсов каждого вида и их нормы расходов, необходимые для выпуска единицы продукции, приведены в таблице 5.

Таблица 5. Наличие ресурсов и нормы их расхода

Ресурсы	Вид продукции		Ограничение на оборудование
Трудовые ресурсы	1	4	14
Материальные ресурсы	3	4	18
Финансовые ресурсы	6	2	27
Прибыль	4	8,5	Максимизировать
План	x_1	x_2	—

а) Определить такой план производства (т. е. объемы выпуска продукции $П_1$ и $П_2$), чтобы получить максимальную прибыль.

б) Решить задачу графически.

в) Определить план производства, при котором достигается максимальный суммарный выпуск продукции. Решить графически.

3. Небольшое предприятие выпускает два типа автомобильных деталей (обозначим их через А и Б). Оно закупает литье, которое подвергается токарной обработке, сверловке и шлифовке. Данные, характеризующие производительность (измеряемая в штуках в час) станочного парка предприятия, приведены в таблице 6.

Таблица 6. Производитель станочного парка

Станки	Деталь А (шт./ч)	Деталь В (шт./ч)
Токарные	25	40
Сверлильные	28	35
Шлифовальные	35	25

Каждая отливка, из которой изготовляют деталь А, стоит 20 руб. Стоимость отливки для детали Б — 30 руб. Продажная цена деталей равна 50 и 60 руб. соответственно. Стоимость часа станочного времени составляет по трем типам используемых станков 200; 140 и 175 руб. Предполагается, что можно выпускать для продажи любую комбинацию деталей А и Б. Необходимо найти план выпуска деталей, максимизирующий прибыль.

а) Найти прибыль на каждую деталь и суммарную прибыль.

б) Составить математическую модель.

в) Дать графическое решение соответствующей задачи линейного программирования.

4. Фирма производит две модели цветных телевизоров, модель А и модель Б. Прибыль, получаемая фирмой при реализации одного телевизора, равна 300 руб. для модели А и 250 руб. для модели Б. Для сборки телевизора необходимы трудовые затраты, измеряемые, например, в человеко-часах, и какого-то времени работы специального оборудования (станочного времени). Сборка одного телевизора модели А требует 2 человеко-часов и 1 час станочного времени; для одного телевизора модели Б требуется 1 человеко-час и 3 часа станочного времени. Фирма стремиться увеличивать свою прибыль и поэтому она заинтересована продать как можно больше телевизоров. Однако имеются некоторые ограничения:

1) фирма может выделить на производство телевизоров не более 40 человеко-часов ежедневно;

2) фирма может выделить на производство телевизоров не более 45 часов станочного времени;

3) невозможно продать более 12 телевизоров модели А в день.

Сколько телевизоров каждой модели следует выпускать фирме, чтобы ее прибыль была как можно больше?

а) Составить математическую модель задачи.

б) Решить графически соответствующую задачу линейного программирования.

5. Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \to \max, \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 60, \\ 2x_1 + 4x_2 \leqslant 4{,}8, \\ 3x_1 \geqslant 15, \\ 5x_1 - 4x_2 \leqslant 40, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

а) Нарисовать область допустимых решений.
б) Найти координаты всех крайних точек допустимой области.
в) Найти оптимальные решения.
г) Найти оптимальное значение целевой функции.

5. Симплекс-метод в линейном программировании

5.1. Предварительные замечания

При решении задач линейного программирования, рассмотренных выше, графическим методом было отмечено, что допустимое множество является многоугольником или неограниченным полиэдром и одна из вершин (крайних точек) этого многоугольника или полиэдра будет оптимальным решением, если решение существует. В случае задач с двумя управляемыми неизвестными и тремя-четырьмя ограничениями легко вручную перебрать все крайние точки и найти оптимальное решение, как это сделано в п. 4.6. Однако для задач большой размерности (т. е. с большим числом переменных и ограничений) необходимы более эффективные методы, чем полный перебор. Для этой цели предложено немало различных алгоритмов. Наиболее эффективным среди них оказался симплекс-метод, разработанный в 1947 г. американским ученым Дж. Данцингом.

Симплекс-метод представляет собой итерационный вычислительный алгоритм, включающий шесть шагов.

Шаг 1. Ввести избыточные и остаточные переменные и записать задачу в канонической форме с ограничениями типа равенства.

Шаг 2. Выбрать первоначальное пробное решение, называемое базисным.

Шаг 3. Проверить, является ли пробное решение оптимальным. Если решение не оптимально, то перейти к шагам 4 и 5 (на которых оно будет улучшено), в противном случае перейти к шагу 6.

Шаг 4. Выделить переменную, которую следует исключить из базиса, и определить переменную, которую следует включить в базис.

Шаг 5. Построить улучшенное решение и проверить его на оптимальность. Если улучшенное решение не оптимально, то повторить шаги 3 и 4. Если же оно оптимально, то перейти к шагу 6.

Шаг 6. Выяснить, единственно или нет оптимальное решение. В случае неединственности найти все решения.

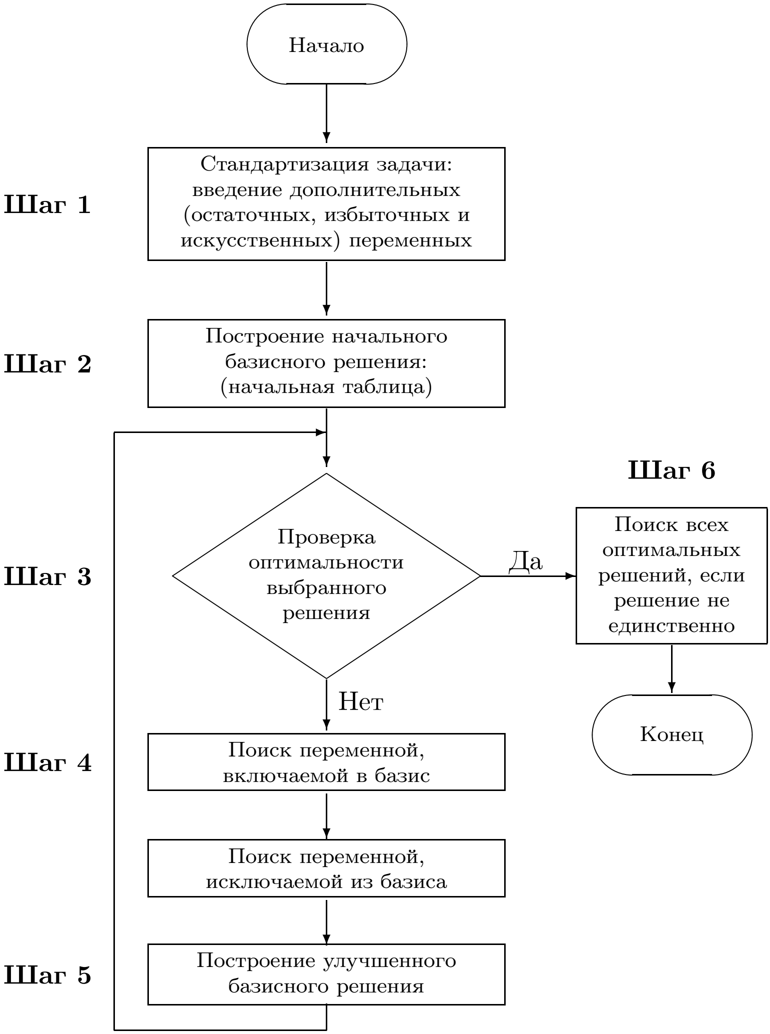


Рис. 37. Блок схема симплекс-метода.

Симплекс-метод приводит к оптимальному решению задачи линейного программирования за конечное число итераций, если решение существует.

Продемонстрируем симплекс-метод сначала на простых задачах: задаче «двух картошек» и задаче о рационе, которые мы уже решили графически. Далее (см. 6.3) рассмотрим решение симплекс- методом несколько более сложной задачи о распределении ресурсов.

5.2. Построение начального базисного решения

Каноническая форма. Говорят, что задача линейного программирования имеет *каноническую форму*, если все ограничения в ней заданы в виде равенств. Так как симплекс-метод имеет дело только с крайними точками допустимого множества, а последние определяются системами линейных уравнений, то рассматриваемую задачу линейного программирования необходимо записать в канонической форме. Это **первый шаг** симплекс-метода, проводимый путем введения дополнительных (остаточных, избыточных или искусственных) переменных.

Остаточные переменные. Ограничение типа «меньше или равно» можно превратить в равенство путем ведения новой неотрицательной переменной, называемой *остаточной.* Так, например, ограничение на продукт Д $0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 1{,}8$ в задаче «двух картошек» можно записать в виде:

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + s_1 = 1{,}8, \\ s_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Здесь переменная s_1 является остаточной переменной и интерпретируется как остаток или неиспользованные производственные возможности. Если ни у одного из поставщиков А и Б картофель не закупается (т. е. $x_1 = 0, x_2 = 0$), то остаток s_1 равен 1,8.

Избыточные переменные. Ограничение типа «больше или равно» можно также превратить в равенство путем введения новой неотрицательной переменной, называемой *избыточной.* Так, например, ограничение на ингредиент Б $x_1+x_2 \geqslant 250$ в задаче «о рационе» можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - s_1 = 250, \\ s_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Переменная s_2 является избыточной переменной и интерпретируется как избыток ингредиента Б.

Искусственные переменные. Если в задаче о рационе зерно не закупается вовсе ($x_1 = x_2 = 0$), то из уравнения $x_1 + x_2 - s_2 = 250$ получаем $s_2 = -250$, что противоречит неотрицательности s_2. Чтобы избежать подобных коллизий, вводят дополнительную переменную, называемую *искусственной*. Это позволит строить начальное базисное решение. Ограничение перепишется в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - s_2 + a_1 = 250, \\ s_2 \geqslant 0, \quad a_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Если теперь $x_1 = x_2 = s_2 = 0$, то $a_1 = 250$, где a_1 —искусственная переменная.

Искусственные переменные приходится вводить также при наличии ограничений типа равенства. В самом деле, если имеется ограничение $3x_1 + 2x_2 = 50$, и в качестве начального пробного решения выбирается $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, то получим невозможное равенство $0 = 50$. Эта неприятность обходится путем введения новой переменной a_2:

$$3x_1 + 2x_2 + a_2 = 50.$$

Здесь при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ получаем $a_2 = 50$.

Единственная цель введения искусственных переменных — упрощение начального пробного решения. Искусственные переменные не имеют никакого физического смысла и не должны влиять на оптимальное решение. Для того чтобы искусственная переменная не вошла в базис, ее включают в целевую функцию с большим коэффициентом M (называемым штрафом).

Приведение задачи к канонической форме. Запишем в канонической форме рассмотренные в 4.2 и 4.4 задачи.

Задача «двух картотек». Так как имеется лишь три ограничения типа «меньше или равно», то следует ввести три остаточных переменных s_1, s_2 и s_3 (остатки или неиспользованные возможности по продуктам Д, К и Х соответственно). Эти переменные войдут в целевую функцию с нулевыми коэффициентами, так как неиспользованные производственные возможности дают нулевую прибыль. Тем самым получим

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 \to \max, \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 + 1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 = 1,8, \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 = 1,2, \\ 0,3x_1 + 0,3x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 1 \cdot s_3 = 2,4 \end{cases}$$

Задача о рационе. Здесь имеется четыре ограничения типа «больше или равно», следовательно, необходимо ввести четыре избыточные и четыре искусственные переменные. Чтобы избежать громоздкой записи, рассмотрим упрощенный вариант задачи о рационе, содержащий только два ингредиента А и Б:

$$\begin{cases} 41x_1 + 35x_2 \to \min, \\ 2,5x_1 + 10x_2 \geqslant 1250, \\ x_1 + x_2 \geqslant 250, \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда нужно ввести две избыточные переменные s_1и s_2 (избытки ингредиентов А и Б) и две искусственные переменные a_1 и a_2. Избыток ингредиентов не приводит к дополнительным затратам, поэтому избыточные переменные войдут в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. Искусственные же переменные включаются в целевую функцию с большим штрафом. В результате будем иметь

$$\begin{cases} 41x_1 + 35x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + Ma_1 + Ma_2 \to \min, \\ 2,5x_1 + 10x_2 + 1s_1 + 0 \cdot s_2 + 1a_1 + 0 \cdot a_2 = 1250, \\ x_1 + x_2 + 0 \cdot s_1 + 1s_2 + 0 \cdot a_1 + 1a_2 = 250. \end{cases}$$

Базисное решение. Второй шаг симплекс-метода состоит в построении начального пробного решения. В канонической задаче линейного программирования ограничения представляют собой систему линейных уравнений, где все неизвестные принимают неотрицательные значения. Так как число уравнений m в системе меньше числа неизвестных n, то система имеет бесконечно много решений. Симплекс-метод оперирует лишь базисными решениями, которые определяются следующим образом. Выберем m переменных и назовем их *базисными*, остальные $n - m$ переменных будут именоваться *небазисными*. Если небазисные переменные положить равными нулю, то получим систему, в которой число уравнений и число неизвестных равны m. Решение этой системы называют *базисным*. Базисное решение, состоящее из неотрицательных значений, называют *допустимым*.

Таблица 7. Базисные решения задачи «двух картошек»

Базисное решение (обозначение)	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Является ли допустимым
O	0	0	1,8	1,2	2,4	Да
M_1	0	6	0	0,6	0,6	Да
M_2	0	12	−1,8	0	−1,2	Нет
M_3	0	8	−0,6	0,4	0	Нет
M_4	9	0	0	−0,6	−0,3	Нет
M_5	6	0	0,6	0	0,6	Да
M_6	8	0	0,2	−0,4	0	Нет
M_7	4,5	3	0	0	0,15	Да
M_8	6	2	0	−1,2	0	Нет
M_9	4	4	−1,2	0	0	Нет

Каноническая форма задачи «двух картошек» имеет три уравнения и пять неизвестных. Это означает, что базисными могут быть любые три переменные, а небазисными —оставшиеся две. Пусть первоначально базисными переменными будут s_1, s_2, s_3, а небазисными — x_1 и x_2. Таким образом, существует 10 различных способов получения базисных решений: нужно каждый раз придавать нулевые значение двум переменным и решать полученную систему; в результате получим 10 базисных решений, перечисленных в таблице 7. Остановимся на первом базисном решении, представленном в таблице 7 (обозначено буквой О). Оно получено при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ из системы трех уравнений с тремя переменными s_1, s_2, s_3. Каждое следующее базисное решение $M_1, \dots, M_9$ получено решением соответствующей системы уравнений, если значение некоторых двух переменных равно нулю.

Как видно, из этих 10 базисных решений только 4 удовлетворяют условию неотрицательности и, следовательно, являются допустимыми. Тем самым поиск оптимального базисного решения сужается с десяти точек до четырех, допустимых, приведенных в таблице 8.

Таблица 8. Допустимые базисные решения задачи «двух картошек»

Обозначение	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
O	0	0	1,8	1,2	2,4
M_1	0	6	0	0,6	0,6
M_5	6	0	0,6	0	0,6
M_7	4,5	3	0	0	0,15

Поиск оптимального решения симплекс-методом начинается с начала координат и движется к той соседней крайней точке, которая дает наибольший прирост (для задач на максимум) целевой функции. Достигнув такой точки, вновь продолжается поиск новой соседней крайней точки, в которой значение целевой функции будет еще больше. Процесс продолжается до тех пор, пока возможно дальнейшее увеличение значения целевой функции. Для иллюстрации проследим этот процесс на задаче «двух картошек» (см. рис. 38).

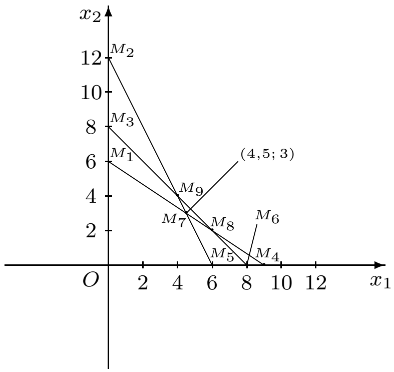


Рис. 38. Базисные решения задачи «двух картошек»

Здесь поиск оптимального решения начинается с точки O и движется к соседней крайней точке M_1 так как прибыль в точке $M_1(0;6)$ равна $36 = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 6$, а в точке $M_5(6;0)$ — только $30 = 5 \cdot 6 + 6 \cdot 0$. На следующем шаге переходим от точки M_1 к оптимальной точке $M_7(4{,}5;3)$. Этот процесс подробно изложим в следующем пункте.

5.3. Улучшение базисного решения

Табличное представление задачи. Если базисное решение не оптимально, то его необходимо улучшить. Процедуру улучшения путем замены базиса удобно объяснить на таблице, составленной из данных задачи (см. таблицу 9).

Таблица 9. Табличное представление задачи «двух картошек».

Список базисных перемен ных	Столбец единичных прибылей	Емкости, (правые части ограни- чений)	Управ- ляемые Перемен- ные		Дополнительные (остаточные, избыточные) переменные		
B	P	Q	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
s_1	0	1,8	0,2	0,3	1	0	0
s_2	0	1,2	0,2	0,1	0	1	0
s_3	0	2,4	0,3	0,3	0	0	1
Строка c_j единичных прибылей			5	6	0	0	0
Строка z_j единичных потерь			0	0	0	0	0
Оценочная строка $(c_j - z_j)$			5	6	0	0	0

Структура таблицы такова. В правом верхнем (северо-восточном) углу расположена матрица технологических коэффициентов задачи (3×5 — матрица, выделенная прямоугольником), которую будем называть *основной матрицей*. Левее от этой матрицы находится столбец правых частей ограничений, т. е. столбец емкостей Q. Левее от столбца емкостей помещен столбец единичных прибылей P, т. е. столбец тех коэффициентов целевой функции, которые вошли в базис. Самый левый столбец B содержит все базисные переменные. Каждый столбец основной матрицы соответствует коэффициентам некоторой (управляемой или дополнительной) переменной, которая помечена над матрицей. Под основной матрицей расположены еще три строки. Первая из них содержит все коэффициенты целевой функции; эта строка обозначается символом c_j и называется *строкой единичных прибылей*. Вторую строку называют *строкой единичных потерь* и обозначают через z_j. Третья строка, называемая *оценочной*, получается в результате поэлементного вычитания строки единичных потерь из строки единичных прибылей и обозначается, естественно, через $c_j - z_j$. Относительно последних двух строк необходимы некоторые пояснения.

Строка единичных потерь z_j**.** В базисном решении небазисные переменные имеют нулевые значения. Увеличение этих переменных может привести к возрастанию целевой функции, но нужно помнить об ограничениях: увеличение небазисных переменных возможно только за счет уменьшения базисных переменных. Так, например, при увеличении x_2 на единицу:

1) значение s_1 должно быть уменьшено на 0,3, чтобы удовлетворялось ограничение

$$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 1{,}8;$$

2) значение s_2 должно быть уменьшено на 0,1, чтобы удовлетворялось ограничение

$$0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 1{,}2;$$

3) значение s_3 должно быть уменьшено на 0,3, чтобы удовлетворялось ограничение

$$0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 2{,}4.$$

Уменьшение целевой функции (прибыли) при этом равно нулю: $0 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}14 - 0 \cdot 0{,}3 = 0$, так как базисные переменные s_1, s_2 и s_3 входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами. Аналогично, при увеличении x_1 на единицу значения s_1, s_2 и s_3 должны быть уменьшены на 0,2, 0,2 и 0,3 соответственно, а уменьшение прибыли вновь равно нулю: $0 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 = 0$.

С другой стороны, уменьшение базисной переменной дает возможность увеличения прочих переменных и не приводит к их уменьшению. Следовательно, уменьшение целевой функции при единичном уменьшении базисной переменной равно коэффициенту, с которой последняя входит в целевую функцию. Эти рассуждения позволяют сформулировать следующее правило.

Правило для нахождения строки z_j. *Для нахождения элемента z_j необходимо взять соответствующий столбец основной матрицы, перемножить его поэлементно на столбец единичных прибылей и результаты сложить.*

Третий шаг симплекс-метода состоит в проверке оптимальности базисного решения, которая проводится в соответствии со следующим правилом.

Правило оптимальности. *Базисное решение оптимально в том и только в том случае, когда в строке $c_j - z_j$, табличного представления нет положительных элементов (и, следовательно, эта строка состоит из отрицательных и нулевых элементов).*

Так как коэффициенты строки $c_j - z_j$, соответствующие переменным x_1, и x_2, в нашем примере положительны, то согласно правилу оптимальности включение любой из этих переменных в базис приведет к возрастанию прибыли. Стало быть, текущее решение не оптимально. Для улучшения этого решения необходимо определить переменную, которую следует включить в базис, и переменную, которую следует исключить из базиса. В этом состоит **четвертый шаг** симплекс-метода.

Правило для включаемой переменной. *Выбрать столбец, содержащий наибольший положительный коэффициент в оценочной строке* $c_j - z_j$*, включить в базис переменную, соответствующую этому столбцу.*

В рассматриваемом примере в базис следует включить переменную x_2, так как столбец, соответствующий именно этой переменной содержит наибольший положительный элемент 6 оценочной строки.

Правило для исключаемой переменной. *Разделить каждый элемент столбца* Q *на соответствующий элемент столбца с включаемой переменной. Если делитель оказался отрицательным или равным нулю, то результатом деления следует считать* $+\infty$*. Строка с наименьшим (возможно нулевым) значением полученных отношений содержит переменную, подлежащую исключению из базиса. Применим это правило к нашему примеру.*

Если разделить поэлементно столбец Q на столбец коэффициентов включаемой переменной x_2, то получим три числа: $1,8/0,3 = 6$; $1,2/0,1 = 12$; $2,4/0,3 = 8$. Эти три числа расположим в дополнительном столбце, который поместим справа от основной матрицы и обозначим, допуская вольность, символом строке Q/x_2. Наименьшее отношение, равное 6, получаем в первой строке. Следовательно, исключить из базиса следует соответствующую базисную переменную s_1.

Таблица 10.
Нахождение исключаемых строки и столбца

B	P	Q	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Q/x_2
s_1	0	1,8	0,2	0,3	1	0	0	6
s_2	0	1,2	0,2	0,1	0	1	0	12
s_3	0	2,4	0,3	0,3	0	0	1	8
Строка c_j			5	6	0	0	0	
Строка z_j			0	0	0	0	0	
Строка $(c_j - z_j)$			5	6	0	0	0	

Теперь переходим к **пятому шагу** симплекс-метода. После того, как мы выбрали новый базис, необходимо преобразовать старую таблицу. Это делается построчно, сначала изменяется строка с исключаемой базисной переменной, затем остальные базисные строки, наконец, строки c_j, z_j и $c_j - z_j$. Элемент, лежащий на пересечении исключаемой строки и столбца с включаемой переменной, назовем *осевым. В нашем примере осевой элемент равен* 0,3.

Правило для исключаемой строки. *Элементы исключаемой строки, содержащиеся в основной матрице и в столбце Q, разделить на осевой элемент.*

Преобразование остальных строк таблицы. Преобразованию подвергаются только элементы основной матрицы и столбца Q. Эта процедура включает три действия:

1. Найти элемент, находящийся на пересечении включаемого столбца и строки, подлежащей преобразованию. Например, для второй строки этот элемент равен $0,1$.

2. Найденный в первом действии элемент умножить на каждый элемент исключаемой преобразованной строки (в нашем случае новая первая строка).

3. Результат второго действия вычесть из старой строки (подлежащей преобразованию); полученное и есть новая преобразованная строка.

Смысл указанных преобразований состоит в том, что в результате каждая базисная переменная должна оказаться с единичным коэффициентом в одном и только одном из ограничений. Значит, базисную переменную необходимо исключить из всех уравнений, кроме одного. Это делается стандартными (и законными) процедурами: умножением обеих частей уравнения на ненулевое число и сложением двух уравнений по частям.

В следующих ниже таблицах показано преобразование второй и третьей строк.

Таблица 11. Вычисление новой второй строки

	Q	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
Преобразованная исключаемая строка (первая)	6	$2/3$	1	$10/3$	0	0
Преобразуемая вторая строка	1,2	0,2	0,1	0	1	0
Новая исключаемая строка	0,6	$1/15$	1	$1/3$	0	0
Результат: Новая вторая строка	0,6	$2/15$	0	$1/3$	1	0

Таблица 12. Вычисление новой третьей строки

	Q	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
Преобразованная исключаемая строка (первая)	6	2/3	1	10/3	0	0
Преобразуемая третья строка	2,4	0,3	0,3	0	0	1
Новая исключаемая строка (первая)	1,8	0,2	0,3	1	0	0
Результат: Новая третья строка	0,6	0,1	0	−1	0	1

Преобразование строки c_j. Эта строка остается неизменной при всех преобразованиях таблицы.

Преобразование строки z_j. Как было сказано выше, нужно столбец основной матрицы перемножить поэлементно на столбец единичных прибылей P и результаты сложить:

$$
\begin{aligned}
&z(x_1):\ 6\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{2}{15}+0\cdot 0{,}1=4\\
&z(x_2):\ 6\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0=6;\\
&z(s_1):\ 6\cdot\frac{10}{3}+0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+0\cdot(-1)=20;\\
&z(s_2):\ 6\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0=0;\\
&z(s_3):\ 6\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0=0.
\end{aligned}
$$

Преобразование строки $c_j - z_j$. Нужно вычесть поэлементно строку z_j из строки c_j. В результате всех перечисленных выше операций получится новая таблица (таблица 13).

Таблица 13. Новая таблица задачи «двух картошек» (итерация 1)

B	P	Q	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Q/x_1
x_2	6	6	2/3	1	10/3	0	0	9
s_2	0	0,6	2/15	0	−1/3	1	0	9/2
s_3	0	0,6	0,1	0	−1	0	1	6
Строка c_j			5	6	0	0	0	
Строка z_j			4	6	20	0	0	
Строка $(c_j - z_j)$			1	0	−20	0	0	

Таблица 14. Новая таблица задачи «двух картошек» (итерация 2)

B	P	Q	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
x_2	6	3	0	1	5	−5	0
x_1	5	4,5	1	0	−2,5	7,5	0
s_3	0	0,15	0	0	−0,75	−0,75	1
Строка c_j			5	6	0	0	0
Строка z_j			5	6	17,5	7,5	0
Строка $(c_j - z_j)$			0	0	−17,5	−7,5	0

Заметим, что в столбце P произошли изменения, поскольку $P(x_2) = 6$ в отличие от первоначальной таблицы, где $P(x_2) = 0$. Из таблицы видно новое базисное решение: $x_2 = 6$, $s_2 = 0,6$, $s_3 = 0,6$. Получаемая при этом прибыль равна $z = 5 \cdot 0 + 6 \cdot 6 = 36$. В оценочной строке имеется положительное число, равное 1, следовательно, найденное базисное решение не является оптимальным. Необходимо повторить шаги 4 и 5. Рассуждая так же, как и выше, находим, что надо включить в базис переменную x_1, а исключить из базиса следует переменную s_2. Далее, повторяется процедура преобразования таблицы 7, следуя описанной выше схеме (см. таблицу 14).

Из таблицы 14 видно новое базисное решение: $x_1 = 4{,}5$, $x_2 = 3$, $s_3 = 0{,}15$. Получаемая при этом прибыль равна $z = 5 \cdot 4{,}5 + 6 \cdot 3 = 40{,}5$. В оценочной строке нет положительных чисел, следовательно, найденное базисное решение является оптимальным.

Альтернативные оптимальные решения. На **шестом шаге** симплекс-метода выясняется единственно или нет оптимальное решение. Если в оценочной строке имеется нулевой элемент, соответствующий небазисной переменной, то эту переменную можно включить в базис и построить новые решения по указанной выше процедуре. При этом значение целевой функции не изменится. Тем самым, новое базисное решение также будет оптимальным. Но если имеется два оптимальных решения, то оптимальных решений бесконечно много. Оптимальным решением будет любая точка лежащая на отрезке, соединяющем найденные два оптимальных решения (см п.4.3). Из этих наблюдений вытекает следующее правило.

Правило для единственности оптимального решения. *Если в оценочной строке все элементы, соответствующие небазисным переменным, отрицательны, то оптимальное решение единственно.*

В таблице 14 оценочная строка не содержит нулей в небазисных столбцах, следовательно, найденное решение задачи «двух картошек» единственно.

5.4. Упражнения

1. Решить следующие задачи симплекс-методом:

$$
\begin{aligned}
\text{а) } & 8x_1 + 6x_2 \to \max,\\
& 4x_1 + 2x_2 \leqslant 60,\\
& 2x_1 + 4x_2 \leqslant 48,\\
& 1x_1 \geqslant 5,\\
& 3x_2 \geqslant 5.\\
\text{б) } & 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 \to \min,\\
& 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 \geqslant 5,\\
& 2x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 2,\\
& -1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 1,\\
& 1x_3 \leqslant 2.\\
\text{в) } & 15x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4 \to \max,\\
& 2x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 0{,}6x_4 \leqslant 10,\\
& 3x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 0{,}25x_4 \leqslant 12,\\
& 7x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 \leqslant 35,\\
& 0 \leqslant x_j \ (x_j := 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{г) } & 60x_1 + 26x_2 + 15x_3 + 4{,}75x_4 \to \max,\\
& 20x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 1x_4 \leqslant 20,\\
& 10x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1x_4 \leqslant 10,\\
& 0 \leqslant x_j \ (x_j := 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}
$$

2. Рассмотрим задачу линейного программирования.

$$
\begin{aligned}
& 5x_1 + 4x_2 \to \min,\\
& 4x_1 + 2{,}5x_2 \geqslant 60,\\
& 2x_1 + 5x_2 \geqslant 60,\\
& 5x_1 + 4x_2 \geqslant 82.
\end{aligned}
$$

а) Решить задачу графически.
б) Показать, что решение единственно.

в) Решить задачу симплекс-методом.

г) Как отражается единственность на процедуре симплекс- метода.

д) Второе неравенство заменим на $2x_1 + 6_2 + \geqslant 60$. Как повлияет это изменение на решение?

3. Рассмотрим задачу линейного программирования.

$$
\begin{aligned}
&5x_1 + 3x_2 \to \min,\\
&4x_1 + 2x_2 \leqslant 10,\\
&2x_1 + 2x \leqslant 8.
\end{aligned}
$$

а) Решить задачу графически.

б) Решить задачу добавив третье ограничение $1x_1 \geqslant 2$.

в) Решить задачу в том случае, когда неравенство во втором ограничении заменено на равенство.

г) Решить задачу в том случае, когда первое ограничение заменяется на $1x_1 - 1x_2 \leqslant -1$.

6. Задача распределения ресурсов

6.1. Математическая модель задачи распределения ресурсов

Постановка задачи. На предприятии, выпускающем неоднородную продукцию, руководитель стремится определить какими должны быть уровни производства для каждого продукта в течении некоторого наперед заданного периода. Эти уровни определены технологическими и другими условиями, заданными в виде линейных соотношений. В рамках этих ограничений руководство пытается оптимизировать некоторую конкретную целевую функцию.

Предположим, что предприятие имеет возможность реализовать от одного до четырех производственно-технологических процессов и может выбирать по своему усмотрению тот или иной режим их осуществления. Технологические процессы первого и второго типов ориентированы на получение продукции А, а технологические процессы третьего и четвертого типов — на получение продукции Б. Расходы, связанные с осуществлением каждого из технологических процессов, определяются трудозатратами (измеряемыми в человеко-неделях), количеством (в единицах веса) потребляемого в течении недели материала Y и количеством (в ящиках) потребляемого в течении недели материала Z. Затраты, связанные с различными технологическими процессами, различны, даже если производится продукция одного и того же вида. Цель деятельности предприятия — получение максимальной прибыли. Но при составлении производственного плана на неделю приходится учитывать также ограничения в людских ресурсах и потребляемом сырье. Производственно-экономические показатели и все имеющиеся ограничения представлены в таблице 15.

Итак, следует определить какие технологические процессы и в каком объеме следует задействовать, чтобы получить максимальную прибыль при заданных ресурсах? Если решение по поводу этой проблемы принято, то, фактически, определено также, какие ресурсы и в каком объеме должны быть израсходованы для получения максимальной прибыли.

Таблица 15. Задача распределения ресурсов

	На единицу продукции А		На единицу продукции Б		Всего
	ТП 1	ТП 2	ТП 3	ТП 4	
Кол-во человеко-недель	1	1	1	1	15
Кол-во материала Y (кг)	7	5	3	2	120
Кол-во материала Z (ящики)	3	5	10	15	100
Доход с ед. продукции (руб.)	4	5	9	11	Максими зировать
Объем выпускаемой продукции	x_1	x_2	x_3	x_4	—

Приступим к построению математической модели сформулированной производственной задачи.

Управляемые переменные. Имеются четыре управляемые переменные: x_1, x_2, x_3, x_4, где x_k — объем продукции, выпускаемой в планируемый период в ходе технологического процесса k ($k \coloneqq 1, 2, 3, 4$). Значения управляемых переменных называют также *производственными мощностями* или *уровнями производственной активности*.

Целевая функция, которую нужно максимизировать имеет вид:

$$z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4.$$

Ограничения. Имеется три ограничения:
ограничения на трудозатраты

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leqslant 15;$$

ограничение на материал Y

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 120;$$

и ограничение на материал Z

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leqslant 100.$$

Кроме того, отрицательные уровни производственной активности не имеют физического смысла, т. е. переменная x_k либо равна нулю, либо принимает положительное значение:

$$0 \leqslant x_1,\ 0 \leqslant x_2,\ 0 \leqslant x_3,\ 0 \leqslant x_4.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
&4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \to \max,\\
&1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leqslant 15,\\
&7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 120,\\
&3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leqslant 100,\\
&0 \leqslant x_1,\ 0 \leqslant x_2,\ 0 \leqslant x_3,\ 0 \leqslant x_4.
\end{aligned}
$$

6.2. Аксиомы линейности

При рассмотрении задач «двух картошек», о рационе и распределении ресурсов мы по умолчанию использовали некоторые дополнительные допущения, которые и приводили нас к линейной модели. На этот раз коротко остановимся на обсуждении вопроса: какие предположения относительно технологии производства обеспечивают линейность модели? Таких предположений два.

Аддитивность. Если заданы уровни производственной активности всех технологических процессов, то полное количество каждого из потребляемых ресурсов равняется сумме одноименных ресурсов, затраченных при реализации отдельных технологических процессов, а полная прибыль равняется сумме прибылей получаемых в результате реализации этих технологических процессов.

Пример. Для производства единицы продукции в ходе технологического процесса 2 и единицы продукции в ходе технологического процесса 4 требуется затратить 2 человеко-недели, 7 килограммов материала Y и 20 ящиков материала Z; прибыль при этом составит 16 долларов.

Делимость (*однородность*). Для каждого из имеющихся технологических процессов, взятого в отдельности, суммарное количество каждого из потребляемых ресурсов и соответствующая прибыль прямо пропорциональны уровню производственной активности.

Условие делимости означает, в частности, что все производственно-экономические показатели могут быть не только целочисленными, но и дробными величинами.

Пример. Чтобы произвести в ходе технологического процесса 1 пять единиц продукции $(x_1 = 5)$, необходимо затратить 5 человеко-недель, 35 килограммов материала Y и 15 ящиков материала Z; при этом прибыль составит 20 рублей. Чтобы произвести в ходе технологического процесса 1 две с половиной единицы продукции А ($x_1 = 2{,}5$), необходимо затратить 2,5 человеко-недель, 17,5 килограммов материала Y и 7,5 ящиков материала Z; при этом прибыль составит 10 рублей.

Эти два условия (аддитивность и делимость) называют иногда *аксиомами линейности.* С точки зрения моделирования они означают, что соответствующая математическая модель записывается в виде линейных выражений. Неформальная же интерпретация такова: в рассматриваемых производственно-технологических процессах доходы прямо пропорциональны затраченным ресурсам, а непропорциональный эффект (технического или экономического характера) либо невозможен, либо пренебрежимо мал.

В задачах, где гипотезы аддитивности или делимости (однородности) не выполняются, прийти к линейной модели невозможно. Примерами таких задач являются следующие две задачи.

Задача о движении снаряда [16].[3] Снаряд пущен с Земли с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к ее поверхности; требуется найти траекторию его движения и расстояние S между начальной и конечной точкой этой траектории.

Пренебрегая размерами снаряда, будем считать его материальной точкой. Возьмем систему координат xOy, ее начало O с исходной точкой, из которой пущен снаряд, ось x направим горизонтально, а ось y — вертикально (рис. 39).

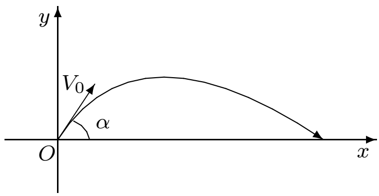


Рис. 39.

Тогда, как известно из школьного курса физики, движение снаряда описывается формулами:

$$x = tv_0 \cos\alpha, \quad y = tv_0 \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

[3]Эта задача предлагалась на вступительном экзамене на отделении экономической кибернетики экономического факультета МГУ в 1968 г.

где t — время, $g = 10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Эти формулы и дают математическую модель поставленной задачи. Выражая t через x из первого уравнения и подставляя во второе, получим уравнение траектории движения снаряда:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Эта кривая (парабола) пересекает ось x в двух точках $x_0 = 0$ (начало траектории) и $x_2 = S = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha$ (место падения снаряда). Подставляя в полученные формулы заданные значения v_0 и α, получим $y = x - 90x^2$, $S = 90$ м.

Ответ: $y = x - 90x^2$, $S = 90$ м.

Отметим, что при построении этой модели использован ряд предположений: например, считается, что Земля плоская, а воздух и вращение Земли не влияют на движение снаряда. В этой задаче не выполняется гипотеза аддитивности. Она относится к *нелинейному программированию.*

Новогодняя задача. На 100 руб. решено купить елочных игрушек. Елочные игрушки продаются наборами. Набор, состоящий из 20 игрушек, стоит 4 руб., набор, состоящий из 35 игрушек, стоит 6 руб., набор, состоящий из 50 игрушек, стоит 9 руб. Сколько и каких наборов нужно купить, чтобы было куплено наибольшее количество игрушек?

Одна игрушка в первом наборе стоит 1/5 руб., во втором наборе — 6/35 руб., в третьем наборе —9/50 руб. упорядочим эти числа: $6/35 < 9/50 < 1/5$. Итак, самые дешевые игрушки во втором наборе, а самые дорогие — в первом.

I	II	III
20 шт	35 шт	50 шт
4 руб.	6 руб.	9 руб.

I	II	III
1 шт	1 шт	1 шт
$\frac{1}{5}$ руб.	$\frac{6}{35}$ руб.	$\frac{9}{50}$ руб.

Чтобы купить на 100 руб. как можно больше игрушек, нужно, конечно, купить побольше дешевых игрушек. Самое большое, мы можем купить 16 наборов по 6 руб. и затратить на это 96 руб.

Остаются 4 руб., на которые можно лишь купить первый набор. Всего мы купим таким образом $16 \cdot 35 + 20 = 580$ игрушек.

Скорее всего, это самый лучший вариант. Проверим все-таки еще такой: если купить 15 шестирублевых наборов, то остается 10 руб. Мы можем тогда купить еще один девятирублевый набор или два четырехрублевых. и в том и в другом случае количество игрушек оказывается меньше, чем в первом варианте.

Итак, надо купить 16 наборов по 6 руб. и 1 набор за 4 руб. При этом будет закуплено 580 игрушек.

Мы пришли к этому ответу с помощью такого естественного соображения: можно купить тем больше, чем они дешевле.

Наши рассуждения правдоподобны, но, вообще говоря, мы перебрали не все возможные варианты. Поэтому приведем более строгое решение.

Пусть x, y и z — количество наборов I, II и III типа соответственно. Надо найти такие неотрицательные числа x, y и z, чтобы выполнялись условия $4x+6y+9z \leqslant 100$ и чтобы величина $S = 20x+35y+50z$ была наибольшей.

Поскольку

$$4x + 6y + 9z = \frac{6}{35}S + \frac{4}{7}x + \frac{3}{7}z \geqslant \frac{6}{35}S,$$

получается, что $\frac{6}{35}S \leqslant 100$, откуда $S \leqslant 583\frac{1}{3}$.

Так как $S = 20x + 35y + 50z$ — целое число, делящееся на 5, имеем $S \leqslant 580$. При $x = 1$, $y = 16$, $z = 0$ все условия выполняются и $S = 580$.

В этой задаче не выполняется гипотеза делимости, поэтому задача относится к *целочисленному программированию*, которое является одним из наиболее сложных разделов математического программирования.

6.3. Решение задачи распределения ресурсов симплекс-методом

Шаг 1. Запишем ограничения задачи в канонической форме (см. 5.2). Для этого необходимо ввести три остаточные переменные s_1,

s_2, s_3:

$$\begin{aligned}
&4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \to \max,\\
&1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 15,\\
&7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 0s_1 + 1s_2 + 0s_3 = 120,\\
&3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 1s_3 = 100,\\
&0 \leqslant x_1,\ 0 \leqslant x_2,\ 0 \leqslant x_3,\ 0 \leqslant x_4.
\end{aligned}$$

Шаг 2. Возьмем три остаточные переменные s_1, s_2, s_3 в качестве базисных. Тогда начальное базисное решение будет:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ s_1 = 15,\ s_2 = 120,\ s_3 = 100.$$

Соответствующую прибыль найдем из целевой функции:

$$\begin{gathered}
4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 =\\
= 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 0 \cdot 15 + 0 \cdot 120 + 0 \cdot 100 = 0.
\end{gathered}$$

Для дальнейших рассуждений составим соответствующую таблицу так, как это проделано в п. 5.3.

Таблица 16. Табличное представление задачи распределения ресурсов

B	P	Q	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Q/x_4
s_1	0	15	1	1	1	1	1	0	0	15
s_2	0	120	7	5	3	2	0	1	0	60
s_3	0	100	3	5	10	15	0	0	1	$6\frac{2}{3}$
Строка c_j			4	5	9	11	0	0	0	
Строка z_j			0	0	0	0	0	0	0	
Строка $(c_j - z_j)$			4	5	9	11	0	0	0	

Строка z_j и столбец P состоят из нулей, так как остаточные переменные входят в целевую функцию с нулевыми коэффициентами.

Шаг 3 (итерация 1). Просмотрев оценочную строку, видим, что в ней имеются строго положительные элементы. Это означает, что найденное базисное решение не является оптимальным и его можно улучшить путем замены базиса. Итак, необходимо перейти к шагу 4.

Шаг 4 (итерация 1). В оценочной строке наибольший положительный элемент равен 11 и он находится в столбце x_4. Следовательно, переменную x_4 необходимо включить в базис. Какую же переменную следует исключить из базиса? Ответ можно получить, если поделить поэлементно столбец Q на столбец x_4. Наименьшее положительное число $6\frac{2}{3}$ получается в третьей строке, поэтому переменная s_3 подлежит исключению из базиса. Сама третья строка будет исключаемой.

Шаг 5 (итерация 1). Приступим к построению улучшенного базисного решения. Сформируем новую таблицу (см. табл. 19), в которой базисными неизвестными будут s_1, s_2 и x_4:

Эта таблица строится в три приема.

а) Новая третья строка (т. е. третья строка в новой таблице 11 возникает путем деления элементов исключаемой строки, кроме элемента в столбце P, на осевой элемент 15. На пересечении исключаемой строки и столбца P появится число 11 — коэффициент переменной x_4 в целевой функции.

б) Вычисление новой первой строки (т. е. первой строки в новой таблице) приведено в таблице 17:

Таблица 17. Вычисление новой первой строки

	Q	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
Преобразованная исключаемая строка (третья)	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{15}$
Преобразуемая первая строка	15	1	1	1	1	1	0	0
Новая исключаемая третья строка	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{15}$
Результат: Новая первая строка	$\frac{25}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{15}$

в) Вычисление новой второй строки (т. е. второй строки в таблице 17) приведено в таблице 18:

Таблица 18. Вычисление новой второй строки

	Q	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
Преобразованная исключаемая строка (третья)	$\frac{20}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{15}$
Преобразуемая вторая строка	120	7	5	3	2	0	1	0
Новая исключаемая третья строка	$\frac{40}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2	0	0	$\frac{2}{15}$
Результат: Новая вторая строка	$\frac{320}{3}$	$\frac{33}{5}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{15}$

Итак, новая таблица имеет вид:

Таблица 19. Новая таблица задачи распределения ресурсов (итерация 1)

B	P	Q	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Q/x_4
s_1	0	25/3	4/5	1/3	2/3	0	1	0	-1/15	125/12
s_2	0	320/3	33/5	13/3	5/3	0	0	1	-2/15	1600/99
x_4	11	20/3	1/5	1/3	2/3	1	0	0	1/15	100/3
c_j			4	5	9	11	0	0	0	
z_j			11/5	11/3	22/3	11	0	0	11/15	
$(c_j - z_j)$			9/5	4/3	5/3	0	0	0	-11/15	

Из таблицы 19 видно, что новое базисное решение имеет вид:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{20}{3},\ s_1 = \frac{25}{3},\ s_2 = \frac{320}{3},\ s_3 = 0.$$

Соответствующую прибыль найдем из целевой функции:

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 =$$
$$= 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 11 \cdot \frac{20}{3} + 0 \cdot \frac{25}{3} + 0 \cdot \frac{320}{3} + 0 \cdot 0 = \frac{220}{3}.$$

Шаг 3 (итерация 2). Просмотрев строку $c_j - z_j$ таблицы 19, видим, что в ней имеются строго положительные элементы. Это означает, что новое базисное решение также не является оптимальным и его опять можно улучшить путем замены базиса. Итак, необходимо повторить шаг 4.

Шаг 4 (итерация 2). В строке $c_j - z_j$ наибольший положительный коэффициент равен 9/5 и он находится в столбце x_1. Следовательно, переменную x_1 необходимо включить в базис. Поделим поэлементно столбец Q на столбец x_1. Наименьшее положительное число 125/12 получается в первой строке, поэтому переменная s_1 подлежит исключению из базиса. Стало быть, первая строка будет исключаемой.

Шаг 5 (итерация 2). Приступим к построению улучшенного базисного решения. Сформируем новую таблицу, в которой базисными неизвестными будут x_1, s_2 и x_4 (см. таблицу 20).

Эта таблица строится так же, как и выше, но на этот раз опустим подробности. Новое базисное решение имеет вид:

$$x_1 = \frac{125}{12},\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{55}{12},\ s_1 = 0,\ s_2 = \frac{4550}{12},\ s_3 = 0.$$

Соответствующую прибыль вычислим подстановкой базисного решения в целевую функцию:

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 =$$
$$= 4 \cdot \frac{125}{12} + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 11 \cdot \frac{55}{12} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{455}{12} + 0 \cdot 0 = \frac{1105}{12}.$$

Таблица 20. Новая таблица задачи распределения ресурсов (итерация 2)

B	P	Q	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	Q/x_4
x_1	4	125/12	1	5/6	5/12	0	5/4	0	-1/12	25
s_2	0	455/12	0	-7/6	13/12	0	-33/4	1	5/12	$+\infty$
x_4	11	55/12	0	1/6	7/12	1	-1/4	0	1/12	55/7
c_j			4	5	9	11	0	0	0	
z_j			4	31/6	97/12	11	9/4	0	7/12	
$(c_j - z_j)$			0	-1/6	11/12	0	-9/4	0	-7/12	

Шаг 3 (итерация 3). Просмотрев строку $c_j - z_j$, таблицы 20 видим что в ней имеется один строго положительный элемент. Значит, новое базисное решение также не является оптимальным и его можно улучшить путем замены базиса; необходимо повторить шаг 4.

Шаг 4 (итерация 3). В строке $c_j - z_j$ единственный положительный коэффициент равен 11/12, и он находится в столбце x_3. Следовательно, переменную x_3 необходимо включить в базис. Поделим поэлементно столбец Q на столбец x_3. Наименьшее положительное число 55/7 получается в третьей стоке, поэтому переменная x_4 подлежит исключению из базиса и третья строка в таблице 20 будет исключаемой.

Шаг 5 (итерация 3). Вновь строим улучшенное базисное решение. Сформируем новую таблицу, в которой базисными неизвестными будут x_1, s_2 и x_3:

Таблица 21. Новая таблица задачи распределения ресурсов (итерация 3)

B	P	Q	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
x_1	4	50/7	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	-1/7
s_2	0	325/7	0	-6/7	0	13/7	-61/7	1	4/7
x_3	9	55/7	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7
c_j			4	5	9	11	0	0	0
z_j			4	38/7	9	88/7	13/7	0	5/7
$(c_j - z_j)$			0	-3/7	0	-11/7	-13/7	0	-5/7

Эта таблица также строится по указанному выше алгоритму. Новое базисное решение имеет вид:

$$x_1 = \frac{50}{7},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{55}{7},\ x_4 = 0,\ s_1 = 0,\ s_2 = \frac{325}{7},\ s_3 = 0.$$

Соответствующую прибыль найдем из целевой функции:

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 =$$
$$= 4 \cdot \frac{50}{7} + 5 \cdot 0 + 9 \cdot \frac{55}{7} + 11 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{325}{7} + 0 \cdot 0 = \frac{695}{7}.$$

Шаг 3 (итерация 4). Опять просматриваем строку $c_j - z_j$ таблицы 21, видим, что в ней нет строго положительных элементов. Значит, полученное на этом этапе базисное решение является оптимальным. Окончательно, приходим к выводу, что базисное решение

$$x_1 = \frac{50}{7},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{55}{7},\ x_4 = 0,\ s_1 = 0,\ s_2 = \frac{325}{7},\ s_3 = 0.$$

является оптимальным и оптимальное значение целевой функции равно $\frac{695}{7}$. Вычисления прекращаются и переходим к шагу 6.

Шаг 6. В последней таблице нашей задачи (таблица 21) строка $c_j - z_j$, не содержит нулевых элементов в небазисных столбцах. Это означает, что найденное решение является единственным.

Полученное решение означает, в частности, что наилучшее использование имеющихся ресурсов таково: людские ресурсы и материалы Z задействованы полностью ($s_1 = s_3 = 0$), а материал Y используется в количестве $120 - s_2 = 73\frac{4}{7}$ кг.

6.4. Упражнения

1. В задаче распределения ресурсов (см. 6.1) изобразить на графике множество допустимых производственных планов, найти оптимальный план и вычислить соответствующее значение целевой функции в предположении, что имеется возможность реализовать только:

а) технологические процессы 1 и 3 (так, что $x_2 = x_4 = 0$);
б) технологические процессы 1 и 4 (так, что $x_2 = x_3 = 0$);
в) технологические процессы 2 и 3 (так, что $x_1 = x_4 = 0$);
г) технологические процессы 2 и 4 (так, что $x_1 = x_3 = 0$).

2. Возьмем задачу распределения ресурсов при тех же ограничениях что и в п. 6.1. Какую из переменных следует включить в базис на первой симплекс-итерации, если целевая функция, подлежащая максимизации, имеет вид:

а) $14x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$; б) $4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 8x_4$;
в) $4x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 11x_4$; г) $-4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4$.

Глоссарий

Автономное потребление [autonomous consumption] — потребление при нулевом доходе (потребление запасов).

Аксиома аддитивности [additivity assumption] — если заданы уровни производственной активности всех технологических процессов, то полное количество каждого из потребляемых ресурсов равняется сумме одноименных ресурсов, затраченных при реализации отдельных технологических процессов, а полная прибыль равняется сумме прибылей получаемых в результате реализации этих технологических процессов.

Аксиома делимости [divisibility assumption] — для каждого из имеющихся технологических процессов, взятого в отдельности, суммарное количество каждого из потребляемых ресурсов и соответствующая прибыль прямо пропорциональны уровню производственной активности.

Алгоритм [algorithm] — точное предписание относительно последовательности действий, преобразующих исходные данные в искомый результат.

Базисная переменная [basic variable] — переменная, входящая в число выбранных переменных при нахождении базисного решения задачи линейного программирования.

Базисное решение [basic solution] — решение системы m линейных уравнений с n переменными ($n \geqslant m$) относительно выбранных m переменных, при условии, что остальным $n - m$ переменным присваиваются нулевые значения.

Блок-схема [block diagram, flowchart] — условное изображение алгоритма, предназначенное для выявления его структуры и общей последовательности операций.

Выпуклое множество [convex set] — множество, удовлетворяющее следующему требованию: отрезок прямой, соединяющий две произвольным образом выбранные точки из рассматриваемого множества, целиком содержится в этом же множестве.

График уравнения [graph of an equation] — множество всех точек координатной плоскости, соответствующее множеству всех решений уравнения.

График функции [graph] — множество всех упорядоченных пар вида $(x; f(x))$, где x пробегает область определения X.

Декартова система координат [Cartesian coordinate system] (на плоскости) — две взаимно перпендикулярные прямые на плоскости с выбранными на них положительными направлениями и единичными отрезками.

Декартовы координаты [Cartesian coordinates] (некоторой точки на плоскости) — упорядоченная пара чисел $(x_0; y_0)$, где x_0 и y_0 — проекции данной точки на оси Ox и Oy соответственно. При этом x_0 называют абсциссой точки, а y_0 — ординатой точки.

Дискретное программирование [discrete programming] — то же, что и целочисленное программирование.

Допустимое решение |feasible solution] — набор значений переменных, удовлетворяющих всем ограничениям задачи.

Задача о рационе (диете) [nutrient problem] — задача наиболее экономного питания с соблюдением некоторых требований питательности; частный случай более общей задачи об оптимальном составе смеси.

Задача распределения ресурсов [resources allocation problem] — задача наилучшего распределения ограниченных ресурсов; обычно решается с помощью линейного программирования.

Избыточная переменная [surplus variable] — переменная, показывающая на сколько использованный ресурс превосходит минимально необходимое количество этого ресурса.

Искусственная переменная [artificial variable] — фиктивный параметр, вводимый в ограничения, чтобы получить начальное решение в симплекс-методе.

Исследование операций [operational, operations research] — применение научного метода к анализу задач организационного управления с тем, чтобы снабдить тех, кто управляет, оптимальными решениями.

Итерационный метод [iterative method] — метод решения оптимизационных задач — заключается в том, что вычислительный процесс начинают с некоторого пробного допустимого решения, а затем применяют алгоритм, обеспечивающий последовательное улучшение этого решения.

Итерация [iteration] — повторное применение математической операции (с измененными данными) при решении вычислительных задач для постепенного приближения к искомому результату.

Каноническая форма [canonical form] — запись задачи линейного программирования в виде, содержащей только ограничения типа равенства; достигается путем введения остаточных, избыточных и искусственных переменных.

Коэффициенты прибыли (издержек) [profit (cost) coefficients] — параметры, входящие в целевую функцию задачи линейного программирования; выражают скорость, с которой значение целевой функции убывает или возрастает при изменении управляемых переменных.

Крайняя точка [extreme point] — точка выпуклого множества, которая не может быть серединой никакого отрезка, соединяющего две различные точки этого множества.

Линейная оптимизационная модель [linear optimization model] — математическая модель, представляющая собой задачу нахождения экстремума линейной функции при линейных ограничениях типа равенства и неравенства.

Линейная функция [linear function] — функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, совпадающая с функцией вида $y = kx + b$ ($x \in \mathbb{R}$), где k и b — фиксированные действительные числа (параметры), а x — независимая переменная.

Линейное неравенство [linear inequality] (с двумя неизвестными) — одно из неравенств вида $ax + by < c$, $ax + by > c$, $ax + by \leqslant c$, $ax + by \geqslant c$, где a, b, c — фиксированные действительные числа, а x и y — неизвестные.

Линейное программирование [linear programming] — раздел теории экстремальных задач, изучающий задачи на нахождение экстремума линейной целевой функции при ограничениях, заданных линейными уравнениями и неравенствами.

Линейное уравнение [linear equation](или *уравнение* 1-*ой степени* с двумя неизвестными) — уравнение вида $ax + by + c = 0$, где a, b, c — фиксированные действительные числа (параметры), а x и y — неизвестные.

Математическая модель [mathematical model] — математическое описание реального объекта или процесса, произведенное в целях их исследования.

Математическое программирование [mathematical programming] — раздел математики, изучающий теорию и методы решения задач на нахождение экстремума функции при ограничениях.

Метод координат [coordinate method] — метод исследования, позволяющий изучать свойства одних объектов (состоящих из чисел) с помощью других — их изображений (состоящих из точек); согласно основному принципу метода координат множество точек координатной плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством упорядоченных пар действительных чисел.

Национальный доход [national income] — совокупность материальных ценностей, произведенных в стране за год, за вычетом всех материальных затрат.

Нелинейное программирование [nonlinear programming] — раздел теории экстремальных задач, изучающий задачи на нахождение экстремума нелинейной целевой функции при ограничениях, задаваемых нелинейными уравнениями или неравенствами.

Неуправляемые параметры [uncontrollable parameters] — постоянные величины, входящие в математические выражения целевой функции и ограничений, не подлежащие изменению для данной задачи.

Область допустимых решений [feasible solution space (area)] — допустимое множество.

Ограничения [constraints] — запись ограничивающих или регулирующих условий, включенных в постановку задачи и не подлежащих изменению для данной задачи. Такие условия выражаются в математической модели в виде системы (линейных) уравнений и неравенств и равенств и называются ограничениями задачи. На практике в качестве ограничений часто выступают ресурсы сырья и материалов, капиталовложения, потребности в готовой продукции и т. п.

Опорный план [basic solution] — базисное решение.

Оптимальное решение [optimal solution] — наилучшее из всех допустимых решений; т. е. допустимое решение, в котором целевая функция принимает наименьшее (наибольшее) значение на допустимом множестве.

Остаточная переменная [slack variable] — переменная, показывающая на сколько имеющийся в наличии ресурс больше использованного ресурса.

Полуплоскость [half-plane] — плоская фигура П, определяемая некоторой прямой l в соответствии со следующими свойствами: 1) П содержит прямую l, но не совпадает с ней; 2) если точки A и B принадлежат П, но не прямой l, то отрезок AB не имеет общих точек с l; 3) если же точка A принадлежит П, а C не принадлежит П, то отрезок AC имеет с прямой l общую точку.

Потребление [consumption] — все непроизводственное потребление, как отдельных лиц, так и государства, включая затраты на оборону, образование, управление и т. д.

Предельная склонность к потреблению [marginal propensity to consume] — отношение прироста потребительских расходов к приросту доходов.

Предложение [supply] — востребованная на рынке способность производителей; количественно равен максимальному объему товара, который может быть представлен и продан производителями на данном рынке (в данное время при данных условиях).

Прямая постоянной прибыли (издержек) [isoprofit (isocost) line] — в графическом изображении задачи линейного программирования прямая на плоскости, на которой целевая функция (прибыль, издержки) принимает постоянное значение.

Прямолинейное движение [rectilinear motion] — движение вдоль прямой.

Прямоугольная система координат [orthogonal coordinate system] — то же, что и декартова система координат.

Прямоугольные (ортогональные) координаты [orthogonal coordinates] — то же, что и декартовы координаты.

Функция [function] — Пусть X — некоторое множество действительных чисел, т. е. $X \subset \mathbb{R}$. Пусть каждому числу x из X в силу некоторого (вполне определенного) закона f приведено в соответствие единственное число y. Это число y принято обозначать символом $f(x)$. Тогда говорят, что задана функция, определенная на множестве X, или, короче, задана функция из X в $\mathbb{R}$.

Равновесие [equilibrium] — состояние экономической системы, характеризующееся равенством спроса и предложения всех ресурсов.

Равновесная цена [equilibrium] — цена товара, при которой объем спроса равен объему предложения, т. е. когда весь произведенный товар находит своего покупателя, и все желающие купить данный товар имеют возможность сделать это.

Решение системы уравнений [solution of a system of equations] — упорядоченный набор действительных чисел, являющийся решением каждого из уравнений системы.

Решение уравнения [solution of an equation] — (с двумя неизвестными x и y) — упорядоченная пара действительных чисел $(x_0; y_0)$ такая, что уравнение обращается в верное числовое равенство при подстановке в него x_0 и y_0 вместо неизвестных x и y соответственно.

Симплекс метод [simplex method] — итерационный вычислительный алгоритм, приводящий к оптимальному решению задачи программирования за конечное число итераций, если решение существует.

Система линейных неравенств (уравнений) [system of linear inequalities (equations)] — два или несколько линейных неравенств (уравнений), которые рассматриваются на предмет наличия у них общих решений.

Склонность к потреблению [propensity to consume] — показатель, которым характеризуется функциональная зависимость текущих потребительских расходов от величины расходов.

Спрос [demand] — платежеспособная потребность потребителей; количественно равен максимальному объему товара, который потребители желают и могут приобрести на данном рынке (в данное время и при данных условиях).

Теория оптимизации [optimization theory] — то же, что и теория экстремальных задач, но в ней более отчетливо прослеживается связь с практическими применениями.

Теория экстремальных задач [theory of extremal problems] — раздел математики, посвященный исследованию задач на нахождение экстремума функции при ограничениях.

Технологические коэффициенты [input-output (technology) coefficients] — параметры в задаче линейного программирования, входящие в ограничения как коэффициенты при управляемых переменных и выражающие скорость, с которой данные ресурсы истощаются или используются.

Управление [control, management] — выработка и осуществление целенаправленных управляющих воздействий на объект или систему, что включает сбор, обработку и передачу необходимой информации, принятие и реализацию соответствующих решений.

Управляемые переменные [decision variables] — переменные в модели, значения которых подвергаются изменению в процессе поиска решения этой модели. Смысл решения задачи состоит в отыскании такого набора значений управляемых переменных, при котором достигается экстремум целевой функции.

Функция предложения [supply function] — зависимость объема предложения от определяющих его факторов.

Функция спроса [demand function] — зависимость объема спроса от определяющих его факторов.

Целевая функция [objective function] — функция, зависящая от управляемых переменных, которая показывает, в каком смысле решение должно быть наилучшим.

Целочисленное программирование [integer programming] — раздел теории экстремальных задач, изучающий задачи, в которых на искомые неизвестные накладывается условие целочисленности, а множество допустимых решений конечно.

Экстремум функции [extremum] — наибольшее или наименьшее значение функции.

Литература

1. Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин.—2-е изд.—М.: Просвещение, 2003.—287 с.
2. Алгебра: Учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин.—3-е изд.—М.: Просвещение, 2002.—285 с.
3. Алгебра: Для 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, Г. С. Сурвилло и др., под ред. Н. Я. Виленкина.—М.: Просвещение, 1995.—256 с.
4. Александров А. Д. и др. Геометрия для 8–9 классов: Учеб пособие для учащихся шк. и классов с углубленным изуч. математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик.—М.: Просвещение, 1991.—415 с.
5. Большая математическая энциклопедия / Якушева Г. М. и др.—М.: ОЛМА ПРЕСС, 2004.—639 с.
6. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 1.—М.: Мир, 1972.—335 с.
7. Дорофеев В. Ю. Пособие по математике для поступающих в СПбГУЭФ.—СПб: Изд-во СПбГУЭФ, 2005.—160 с.
8. Калнин Р. А. Алгебра и элементарные функции.—М.: Наука, 1969. 464 с.
9. Колесников А. Н. Краткий курс математики для экономистов: Учеб. пос.—М.: ИНФРА-М, 1997.—208 с.
10. Кусраев А. Г. Линейные модели организационного управления.—Владикавказ: Изд-во ГКНВО, 1997.—64 с.
11. Кутателадзе С. С. О месте нестандартных моделей // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 3.—С. 52–56.
12. Математика: Энциклопедия / Под ред. Ю. В. Прохорова.—М.: Большая Российская энциклопедия, 2003.—845 с.
13. Прикладная экономика. Учебное пособие для учащихся старших классов.—М., 1993.
14. Решетняк Ю. Г. Курс математического анализа. Ч. I, кн. 1.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.—454 с.
15. Малафеев А. Н. Систематический курс лекций по экономической теории // Экономическая школа. Периодический научно-популярный журнал.—1991.—Т. 1, вып. 1.—с. 16–25.

16. Скворцова М. Математическое моделирование // Математика.— 2003, № 14.
17. Стратилатов П. В. Дополнительные главы по курсу математики. Учеб. пос. по факультативному курсу для учащихся 9 кл.—М.: Просвещение, 1974.—144 с.
18. Ткачук В. В. Математика абитуриенту.—М.: МЦНМО, 2006.—960 с.
19. Фридманов Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов средней школы.—М.: Просвещение, 1989.—192 с.

АБАТУРОВА ВЕРА СЕРГЕЕВНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ШКОЛЬНИКАМ

1

Линейные модели

Компьютерная верстка *Биченова М. С.*

Подписано в печать 31.05.2007. Формат бумаги $60\times84^{1}/_{16}$.
Усл. п. л. 6,51. Тираж 100 экз.

Владикавказский научный центр РАН и РСО-А,
362025, г. Владикавказ, пр. Коста, 93.